

POUDRA

**Surfaces du deuxième degré, plans
polaires, construction d'une surface
du troisième degré**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 16
(1857), p. 148-151

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1857_1_16__148_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1857, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SURFACES DU DEUXIÈME DEGRÉ,
Plans polaires, Construction d'une surface du troisième degré;

PAR M. POUDDRA.

Proposition I. Lorsque plusieurs surfaces du deuxième degré passent par huit points communs, les plans polaires d'un neuvième point M pris par rapport à ces surfaces passent par une même droite.

Démonstration. En effet, toutes ces surfaces ont en commun une courbe du quatrième ordre; donc si par le point M on mène un plan quelconque, il coupera les surfaces du deuxième degré suivant des coniques qui auront quatre points communs: les polaires du point M , relatif à ces coniques, passeront donc par un même point N qui sera ainsi dans tous les plans polaires. Il en sera de même pour tout autre plan mené par M ; donc tous ces points N devant se trouver en même temps dans tous les plans polaires de ce point M , il en résulte qu'il faut que tous ces plans passent par une même droite.

Corollaire I. Si le point M est un des points communs à toutes les surfaces, les plans polaires de ce point seront les plans tangents aux surfaces en ce point. Donc tous les plans tangents à une série de surfaces du deuxième degré ayant en commun une même courbe du quatrième ordre

en un point de cette courbe passent par une même droite.

Corollaire II. Si le point M est à l'infini, chaque plan polaire passe par le centre de la surface ainsi que chaque polaire. Donc, lorsque plusieurs surfaces du deuxième degré passent par une même courbe du quatrième, tous les centres se trouvent sur une même droite.

Proposition III. Les plans polaires relatifs à quatre de ces surfaces ont le même rapport anharmonique, quelle que soit la position du point M.

En effet, par le point M menons un plan quelconque. Il coupera les quatre surfaces suivant quatre coniques passant par quatre mêmes points. Le rapport anharmonique des polaires d'un point quelconque de ce plan est toujours le même, et ce rapport est égal à celui des quatre plans polaires. Or cela ayant lieu pour tous les plans passant par M, existe pour les points de leur commune intersection et, par suite, pour un point quelconque de l'espace. Donc, etc.

Corollaire. Si le point M est un des points communs d'intersection des surfaces, les plans tangents en ce point formeront donc un faisceau dont le rapport anharmonique sera le même, quelle que soit sa position sur la courbe d'intersection. Donc tous ces plans tangents formeront par les intersections de faisceaux homographiques un hyperboloïde passant par cette même courbe. (On voit, en effet, que pour deux points de cette courbe les deux faisceaux de plans tangents étant homographiques, se coupent sur cet hyperboloïde.) Chaque génératrice de cette surface se trouvant à la fois dans tous les plans tangents à toutes les surfaces passant par ce point, il en résulte que cet hyperboloïde sera tangent à toutes ces surfaces du deuxième degré suivant la courbe commune d'intersection.

Nous appellerons aussi, pour abrégé, rapport anhar-

monique de quatre de ces surfaces du deuxième degré passant par une même courbe d'intersection, le rapport anharmonique des plans polaires d'un point quelconque relatives à ces courbes, ou bien le rapport anharmonique des quatre plans tangents à ces surfaces passant par une même droite, génératrice de l'hyperboloïde tangent à toutes les surfaces du deuxième ordre passant par la même courbe d'intersection.

Remarquons que l'hyperboloïde tangent ne contient généralement sur chaque génératrice qu'un seul point de la courbe du quatrième ordre, intersection commune des surfaces du deuxième degré, tandis que les hyperboloïdes qui nous ont servi (*voir t. XV, p. 385*) à déterminer cette courbe ont une génératrice qui passe par deux points de cette courbe.

Proposition III. Quand une série de surfaces du deuxième degré ont une même courbe d'intersection, si l'on prend les plans polaires d'un point quelconque par rapport à ces surfaces, et qu'ensuite par une droite P quelconque on mène des plans (dont trois de direction arbitraire) forment un faisceau homographique au faisceau formé par les plans polaires, je dis que ces plans, qui correspondront un à un respectivement aux surfaces du deuxième degré, rencontreront respectivement ces surfaces suivant des coniques dont le lieu géométrique sera une surface du troisième ordre passant par la courbe d'intersection et par la droite P.

En effet, si l'on coupe tout le système par un plan, les surfaces du deuxième degré donneront par leurs intersections un faisceau de coniques passant par quatre mêmes points et dont le rapport anharmonique sera celui des plans polaires, et le faisceau de plans donnera un faisceau de droites dont le rapport anharmonique sera celui du faisceau de plans; donc ce faisceau de droites sera homo-

graphique avec celui des coniques, et, par conséquent, les points d'intersections respectifs donneront, comme on sait (t. XIV, p. 360) une courbe du troisième ordre passant par les quatre points communs des coniques et par le sommet du faisceau de droites, sommet qui appartient à la droite P. Tous les plans sécants donneront de même des courbes du troisième ordre; donc le lieu de toutes ces courbes du troisième ordre sera bien une certaine surface du troisième ordre passant par la courbe d'intersection et par la droite P.

Proposition IV. Par quinze points de l'espace faire passer une surface du troisième degré.

Par huit de ces points, on fait passer un faisceau de surfaces du deuxième degré passant successivement par les points 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, ce qui fait sept de ces surfaces. On cherche ensuite par le problème (*Nouvelles Annales*, t. XV, p. 161) la droite par laquelle sept plans étant menés par des points 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, ces sept plans forment un faisceau homographique à celui des sept surfaces du deuxième degré passant respectivement par ces points. Les intersections des surfaces du deuxième degré par les plans respectifs correspondants donneront des sections coniques appartenant à la surface du deuxième degré passant par les quinze points donnés (prop. III).

Proposition V. Si par huit points on fait passer un faisceau de surfaces du deuxième degré et par huit autres points un autre faisceau, mais tel, que les rapports anharmoniques des deux faisceaux soient les mêmes, alors les deux surfaces du deuxième degré correspondantes de chaque faisceau se couperont suivant des courbes du quatrième degré dont l'ensemble formera une surface du quatrième degré passant par les seize points donnés (*voir* t. XII, p. 358).
