

EMILE MATHIEU

**Théorème sur les racines commensurables
d'une équation**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 16
(1857), p. 145-148

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1857_1_16__145_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1857, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**THÉORÈME SUR LES RACINES COMMENSURABLES
D'UNE ÉQUATION;**

PAR M. EMILE MATHIEU,
Professeur.

Soit l'équation algébrique à coefficients *entiers*

$$f(x) = Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \dots + Hx + L = 0.$$

Ann. de Mathémat., t. XVI (Avril 1857.)

1°. L'équation n'a pas de racines commensurables, si, A et L étant impairs, l'un des nombres $f(1)$ et $f(-1)$ est aussi impair.

2°. L'équation n'a pas non plus de racines commensurables, si, des quatre nombres A, L, $f(1)$ et $f(-1)$, aucun n'est divisible par 3.

Démonstration. En effet, soit $\frac{a}{b}$ une racine fractionnaire irréductible de cette équation; on aura

$$f(x) = \left(x - \frac{a}{b}\right) \varphi(x)$$

ou

$$f(x) = \left(x - \frac{a}{b}\right) \left| \begin{array}{l} Ax^m + \frac{Aa}{b} x^{m-1} + \frac{Aa^2}{b^2} x^{m-2} + \dots + \frac{Aa^{m-1}}{b^{m-1}} \\ + B \qquad \qquad \qquad + \frac{Ba}{b} \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad + C \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad + H \end{array} \right|$$

Posons

$$\varphi(x) = \frac{\psi(x)}{b^{m-1}},$$

$\psi(x)$ étant un polynôme algébrique dont les coefficients sont entiers; donc

$$f(x) = \left(x - \frac{a}{b}\right) \frac{\psi(x)}{b^{m-1}}.$$

Soit α un nombre entier; on obtient l'identité

$$f(\alpha) = \frac{(b\alpha - a)\psi(\alpha)}{b^m}$$

et

$$\psi(\alpha) = \frac{b^m f(\alpha)}{b\alpha - a}.$$

Or si un nombre premier p divise b^m , il divise b , il est

(147).

donc premier avec a ; donc il n'y a pas de facteur commun à b^m et à $bx - a$; il faut donc que $\frac{f(\alpha)}{b\alpha - a}$ soit un nombre entier, quel que soit α .

Faisons-y successivement

$$\alpha = 0, \quad \alpha = 1, \quad \alpha = -1,$$

et alors

$$\frac{L}{a}, \quad \frac{f(1)}{b-a}, \quad \frac{f(-1)}{b+a}$$

sont entiers.

Or $\frac{b}{a}$ est racine de l'équation inverse

$$Lx^m + Hx^{m-1} + \dots + Bx + A = 0;$$

donc, par la même raison que $\frac{L}{a}$ est entier, $\frac{A}{b}$ sera aussi entier, dans l'équation inverse.

D'après cela, si A et L , multiples respectifs de b et a , sont impairs, a et b sont aussi impairs; donc $b - a$ et $b + a$ sont pairs et $f(1)$ et $f(-1)$ sont pairs.

Donc si A et L sont impairs et que l'un des nombres $f(1)$ et $f(-1)$ soit aussi impair, l'équation ne peut avoir de racines fractionnaires; le raisonnement reste le même lorsque $b = 1$: donc l'équation n'a pas de racines commensurables; dans ce cas, le théorème rentre dans le cas examiné (*Nouvelles Annales*, t. XV, p. 449).

Supposons, en second lieu, que A et L ne soient pas divisibles par 3, a et b ne le seront pas non plus; on aura

$$a = 3p \pm 1, \quad b = 3q \pm 1,$$

et il est facile de voir que l'un des nombres $a - b$ et $a + b$ sera divisible par 3; donc l'un des nombres $f(1)$ et $f(-1)$ sera nécessairement divisible par 3.

Donc l'équation n'a pas de racines commensurables, si

des quatre nombres A , L , $f(1)$ et $f(-1)$ aucun n'est divisible par 3.

Corollaire. Toute équation d'un nombre impair de termes dont tous les coefficients sont impairs n'a aucune racine commensurable.

Observation. Si le terme tout connu manque, il y a des racines nulles.