

COMBESURE

Théorème sur le triangle sphérique

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 16
(1857), p. 142-143

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1857_1_16__142_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1857, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

THÉORÈME SUR LE TRIANGLE SPHÉRIQUE ;

PAR M. COMBESCORE,
Professeur à Montpellier.

Théorème. ABC triangle sphérique; O centre de la sphère, V_1 volume du parallépipède qui a pour arêtes OA', OB', OC' ; A', B', C' sont les milieux des côtés du triangle. S étant l'aire du triangle, on a

$$V_1 = \sin \frac{1}{2} S.$$

(CORNELIUS KEOGH.)

Démonstration. En désignant par a', b', c' les côtés du triangle A', B', C' , on a

$$\cos c' = \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b + \sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b \cos C,$$

ou, en substituant les expressions connues de $\cos \frac{1}{2} a$, $\sin \frac{1}{2} a$, etc., en fonction des angles,

$$\cos c' = \cos \frac{1}{2} S \sqrt{\frac{\sin \left(A - \frac{1}{2} S \right) \sin \left(B - \frac{1}{2} S \right)}{\sin A \sin B}}, \dots$$

Maintenant on a

$$\begin{aligned} V_1^2 &= \sin^2 b' \sin^2 c' \sin^2 A' \\ &= 1 - \cos^2 a' - \cos^2 b' - \cos^2 c' + 2 \cos a' \cos b' \cos c', \end{aligned}$$

et en substituant les expressions précédentes de $\cos c'$, $\cos b'$, $\cos a'$, il vient, après quelques transformations faciles,

$$V_1^2 = 1 - \cos^2 \frac{1}{2} S$$

(143)

ou

$$V_1 = \sin \frac{1}{2} S.$$