Alexandre Allegret

Solution de quelques problèmes curieux d'arithmétique

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 16 (1857), p. 136-139
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1857_1_16__136_0>

SOLUTION DE QUELQUES PROBLÈMES CURIEUX D'ARITHMÉTIQUE;

PAR M. ALEXANDRE ALLEGRET,
Professeur à Paris.

On trouve dans le premier livre de l'*Arithmétique* de Diophante quelques énoncés de problèmes susceptibles d'une grande extension et qui, modifiés légèrement, conduisent à d'autres problèmes linéaires que la sagacité de Leonardo Pisano (*voir* le *Bulletin*, 1855-56) s'est appliquée à résoudre. Je m'occuperai spécialement dans cet article des propositions XXV, XXVI, XXVII et XXVIII, Dioph., liv. Ier, qui rentrent comme cas particuliers dans les deux problèmes d'arithmétique suivants.

Problème I. On range un certain nombre de personnes en cercle, et on donne à chacune une certaine somme dont elle est chargée de remettre une fraction déterminée d'avance à la personne qui se trouve placée à sa droite. Chaque personne reçoit alors de la main gauche une somme, en même temps qu'elle en remet une autre de la main droite. On demande de déterminer quelle somme il faudrait donner primitivement à chacune de ces personnes pour qu'après tous les échanges effectués comme il vient d'être dit, elles se trouvent toutes en possession d'une même somme.

Solution. Ce problème est susceptible d'une solution uniforme, indépendante du nombre des personnes qui entrent dans l'énoncé. Pour fixer les idées, je me bornerai à traiter le cas où il s'agit de cinq personnes; on verra facilement que la méthode est générale.

Soient

$$b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4,\ b_5$$

les cinq fractions données d'avance, et posons, pour plus de simplicité,

$$b_1 = \frac{1}{a_1+1},\quad b_2 = \frac{1}{a_2+1},\quad b_3 = \frac{1}{a_3+1},$$

$$b_4 = \frac{1}{a_4+1},\quad b_5 = \frac{1}{a_5+1},$$

ou

$$a_1 = \frac{1-b_1}{b_1},\quad a_2 = \frac{1-b_2}{b_2},\quad a_3 = \frac{1-b_3}{b_3},$$

$$a_4 = \frac{1-b_4}{b_4},\quad a_5 = \frac{1-b_5}{b_5}.$$

on aura, d'après les conditions du problème, cette suite d'équations

$$x_5 + a_1 x_1 = x_1 + a_2 x_2 = x_2 + a_3 x_3 = x_3 + a_4 x_4 = x_4 + a_5 x_5,$$

les cinq inconnues de la question étant représentées par

$$\frac{x_1}{b_1},\quad \frac{x_2}{b_2},\quad \frac{x_3}{b_3},\quad \frac{x_4}{b_4},\quad \frac{x_5}{b_5},$$

et x_1, x_2, x_3, x_4 et x_5 étant cinq autres inconnues auxiliaires qu'il s'agit de déterminer.

Remarquons que, comme il ne peut être question que de la recherche du rapport de ces diverses inconnues, on pourra poser

$$x_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & a_2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a_3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & a_4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & a_5 \end{vmatrix}$$

Pour toute autre inconnue, x_3 par exemple, on aura

$$x_3 = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & a_2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & a_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & a_4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a_5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & a_1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & a_2 \end{vmatrix}$$

et plus généralement, i ou son résidu suivant le module 5 désignant l'un quelconque des indices 1, 2, 3, 4 ou 5. on aura

$$x_i = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & a_{i+1} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a_{i+2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & a_{i+3} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & a_{i+4} \end{vmatrix} = a_{i+1}\, a_{i+2}\, a_{i+3}\, a_{i+4} + (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & a_{i+1} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a_{i+2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 & a_{i+3} \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Faisant passer la dernière ligne du dernier déterminant à la première place, ce qui revient à multiplier le déterminant par $(-1)^3$, on aura

$$x_i = a_{i+1}\, a_{i+2}\, a_{i+3}\, a_{i+4} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & a_{i+1} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a_{i+2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 & a_{i+3} \end{vmatrix}$$

Or ce déterminant est susceptible d'une réduction analogue à la précédente et on est ainsi conduit à la formule suivante d'une remarquable simplicité :

$$\frac{1}{b_i} x_i = \frac{1}{b_i} \begin{pmatrix} a_{i+1}\, a_{i+2}\, a_{i+3}\, a_{i+4} - a_{i+1}\, a_{i+2}\, a_{i+3} \\ + a_{i+1}\, a_{i+2} - a_{i+1} + 1 \end{pmatrix}.$$

Application. Supposons qu'on donne

$$b_1 = \frac{1}{2}, \quad b_2 = \frac{1}{3}, \quad b_3 = \frac{1}{4}, \quad b_4 = \frac{1}{5}, \quad b_5 = \frac{1}{6},$$

on aura

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_3 = 3, \quad a_4 = 4, \quad a_3 = 5$$

et

$$\begin{aligned}
x_1 &= 2.3.4.5 - 2.3.4 + 2.3 - 2 + 1 = 101, \\
x_2 &= 3.4.5.1 - 3.4\ 5 + 3\ 5 - 3 + 1 = 10, \\
x_3 &= 4.5\ 1.2 - 4.5.1 + 4.4 - 4 + 1 = 37, \\
x_4 &= 5.1.2.3 - 5.1.2 + 5.1 - 5 + 1 = 21, \\
x_5 &= 1.2.3.4 - 1.2.3 + 1.2 - 1 + 1 = 20.
\end{aligned}$$

Les cinq inconnues seront donc proportionnelles aux cinq nombres suivants :

$$202, \quad 30, \quad 148, \quad 105 \quad \text{et} \quad 120,$$

ce qu'on peut vérifier immédiatement.

La suite prochainement.