NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

H. D'ARREST

Sur l'ellipse de Cassini

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 16 (1857), p. 105-107

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1857_1_16__105_1>

SUR L'ELLIPSE DE CASSINI;

D'APRÈS M. H D'ARREST

(*Astron. Nachr* 1854, t. XXXVIII, p. 199.)

1. Soient:

$2e =$ la distance des deux foyers;

$2a =$ le grand axe;

$d =$ le produit constant des rayons vecteurs.

On a pour l'équation de la courbe en coordonnées rectangulaires et focales, origine au centre,

$$(1)\quad \left\{ \begin{array}{r} (x^2 + y^2)^2 - 2e^2(x^2 - y^2) - d^4 + e^4 = 0, \\ \rho^4 - 2e^2\rho^2\cos^2\varphi - d^4 + c^4 = 0. \end{array} \right.$$

Prenons a pour unité et désignons le demi petit axe par b, de sorte que $d^2 + e^2 = 1$, $b^2 = d^2 - e^2$,

$$(2)\qquad e = \sqrt{\frac{1 - b^2}{2}}, \quad d = \sqrt{\frac{1 + b^2}{2}},$$

---

aussi très-peu de CAH, on aura FB $>$ AD, ce qui est le contraire de ce qu'indique l'enonce l'équation polaire devient

$$\rho^4 - (1 - b^2)\rho^2 \cos 2\varphi - b^2 = 0.$$

Soit une sphère de rayon 1 et ayant même centre que la courbe de Cassini. Considérons cette courbe comme étant dans le plan de l'équateur et faisons la projection stéréographique de cette courbe; le pôle étant dans un hémisphère et la projection dans l'hémisphère opposé, α et δ étant des coordonnées sphériques, l'équation de la courbe sphérique sera

$$(3) \qquad \left(\frac{1 - \sin\delta}{1 + \sin\delta}\right)^2 - \frac{1 - \sin\delta}{1 + \sin\delta}(1 - b^2)\cos^2\alpha = b^2.$$

Si l'on transporte l'origine au centre de la projection et si l'on désigne les nouvelles coordonnées sphériques par α' et δ', de sorte que

$$\cos\delta' \cos\alpha' = \sin\delta,$$
$$\cot\delta' \sin\alpha' = \operatorname{tang}\alpha,$$

après quelques légères réductions, l'équation (3) se change en celle-ci :

$$(4) \qquad \cos\delta' = D\cos\alpha' \quad \text{ou} \quad D = \frac{1 + b^2}{1 - b}.$$

Ainsi la courbe est l'intersection d'une sphère et d'un cylindre circulaire droit de diamètre D et passant par le centre de la sphère.

Comme

$$b^2 = \frac{D - 1}{D + 1}, \quad e = \sqrt{\frac{1}{D + 1}}, \quad d = \sqrt{\frac{D}{D + 1}};$$

donc : 1°. Si D est plus grand que 2, on obtient l'ellipse de Cassini;

2°. Si D est compris entre 1 et 2, alors la courbe est fermée avec inflexion;

3°. Si $D = 1$, on a la lemniscate de Bernoulli;

4°. Si $D < 1$, on a les deux ovales avec un demi petit axe imaginaire.