NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. DE JONQUIÈRES

Démonstration de quelques théorèmes de M. Steiner

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 15 (1856), p. 94-98

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1856_1_15__94_0>

DÉMONSTRATION DE QUELQUES THÉORÈMES DE M. STEINER

(voir t. XIV, p 141),

PAR M. E. DE JONQUIÈRES,
Lieutenant de vaisseau.

THÉORÈME I. *En inscrivant dans un quadrilatère deux coniques, les huit points de contact sont sur une même conique.*

Soient ABCD le quadrilatère ; EF les points de concours de ses côtés opposés ; G le point de croisement des diagonales AC, DB ; H le point de rencontre de DB et de EF ; 1, 2, 3, 4 les quatre points de contact de la première conique ; 5, 6, 7, 8 ceux de la seconde sur les côtés AD, AB, BC, CD respectivement. On sait que les cordes de contact 12, 56, 87, 43 concourent en H, et que les cordes de contact 13, 24, 57, 68 concourent en G (*Géométrie supérieure*, n° 692).

Cela posé, par les cinq points 1, 2, 3, 4, 5 faisons passer une conique, elle coupera la droite H5 en un point qui sera le conjugué harmonique du point 5 par rapport aux deux points H et au point h, où cette droite est coupée par les diagonales FF et AC respectivement (*Géom. sup.*, n° 698) ; or le point 6, qui est sur cette droite HS, est précisément ce conjugué harmonique (*Géom. sup.*, n° 693) ; donc la conique (12345) passera par le point 6.

De même, cette conique coupera la droite G5 en un point qui sera le conjugué harmonique du point 5 par rapport au point G et au point g où la droite G5 coupe EF (n° 698) ; or le point 7, qui est sur cette droite, est précisément ce conjugué harmonique (n° 693) ; donc la conique passe par ce point 7.

En considérant enfin la corde 6G8, on prouverait de la même manière que la conique passe par le point 8.

Ainsi le théorème est démontré.

Théorème II. *Une conique étant inscrite dans un quadrilatère, si, par les quatre points de contact, on fait passer une seconde conique, elle coupera les côtés en quatre nouveaux points qui sont les points de contact d'une conique inscrite.*

Ce théorème est le réciproque du précédent. La démonstration s'appuie exactement sur les mêmes propositions de la *Géométrie supérieure;* il suffit de renverser le raisonnement qu'on vient de faire pour le premier théorème.

Théorème III. *Les huit points de contact des deux coniques inscrites dans un quadrilatère donnent soixante-dix groupes de quatre points.*

Douze de ces points sont avec deux des quatre sommets opposés sur une même conique.

Ces douze coniques se partagent en six couples de coniques tels, que dans chaque couple les coniques ont un double contact.

On a soixante-dix groupes de quatre points, parce que c'est le nombre des combinaisons différentes de huit points pris quatre à quatre.

Les trois diagonales AC, BD, EF du quadrilatère sont des ellipses infiniment aplaties inscrites dans ce quadrilatère ; leurs extrémités représentent chacune deux points de contact de ces ellipses avec les côtés du quadrilatère. Donc, par le théorème I, les deux extrémités d'une même diagonale se trouvent sur la même conique que quatre points de contact d'une autre conique inscrite.

Cela donne d'abord les six coniques :

(1234 AC), (1234 BD), (1234 EF),
(5678 AC), (5678 BD), (5678 FF).

Combinons actuellement ces extrémités des diagonales avec quatre points de contact appartenant à deux coniques distinctes, et choisis de manière que l'on n'ait que deux points sur chaque côté du quadrilatère en comptant ces extrémités elles-mêmes ; on obtiendra les six coniques suivantes :

(1278 AC), (1476 BD), (1638 EF),
(3456 AC), (3258 BD), (2457 EF).

Je dis ces *six coniques*, car il est évident que les raisonnements employés pour démontrer le théorème I s'appliquent encore ici, puisque les cordes (12) et (78), par exemple, concourent au point H, *pôle* de AC ; que, dans le second groupe, les cordes (14), (67) concourent au *pôle* de BD, et que, dans le troisième, les cordes (13), (68) concourent au *pôle* de EF.

Et il est d'ailleurs bien évident que ce sont là les seules combinaisons possibles. En tout douze coniques.

Associons-les de la manière suivante :

(1234 AC)	(5678 AC)	(1234 BD)
(1278 AC)	(5634 AC)	(1674 BD)
(5678 BD)	(1234 EF)	(5678 EF)
(5238 BD)	(1638 EF)	(5274 EF)

Les deux coniques de chacun de ces six groupes ont un double contact aux sommets du quadrilatère par lesquels elles passent. Par exemple, les deux coniques (1234 AC) (1278 AC) se touchent en A et en C. Ceci résulte de ce que, dans ces deux coniques, la corde AC a le même pôle

H, et que, par conséquent, elles ont l'une et l'autre pour tangentes en A et C les droites AH, CH.

Et ainsi des autres. Le théorème est donc démontré.

Théorème IV. L'énoncé de ce théorème est évidemment faux; il faut lire :

Dans un quadrilatère inscrit à un cercle, le produit des distances de chaque point de la circonférence à deux côtés opposés est égal au produit des distances du même point aux deux autres côtés opposés.

Il est démontré dans la *Géométrie supérieure*, p. 463.

Théorème V. *Étant donné sur un plan un système de paraboles ayant même foyer* F *et deux points fixes* A *et* B, *si par ces deux points on mène quatre tangentes à l'une d'elles, le produit des rayons vecteurs qui aboutissent aux points de contact est constant, quelle que soit la parabole.*

En effet, le théorème n° 664 de la *Géométrie supérieure* (p. 498 — *autrement*) s'applique aux sections coniques avec une démonstration identique et il prend l'énoncé suivant :

Quand un quadrilatère est circonscrit à une conique, si une tangente roule sur la courbe, le produit de ses distances à deux sommets opposés est au produit de ses distances aux deux autres sommets opposés dans une raison λ qui reste constante.

La raison λ est égale au produit des distances de l'un quelconque des deux foyers aux deux premiers sommets divisé par le produit des distances du même foyer aux deux autres sommets.

Si l'un des foyers est à l'infini, $\lambda = 1$; donc :

Quand un quadrilatère est circonscrit à une parabole, le produit des distances du foyer de la courbe à deux sommets opposés est égal au produit des distances de ce foyer aux deux autres sommets.

Si l'on suppose que les deux premiers sommets soient deux points de la courbe, les deux autres sommets se confondront avec les deux points de concours des tangentes en ces deux points. Il en résulte que :

Quand un angle est circonscrit à une parabole, le produit des distances des points de contact des deux côtés au foyer de la courbe est égal au carré de la distance de son sommet à ce foyer.

De ce dernier théorème, dû à Lambert, on conclut, dans la question qui nous occupe, que le produit

$$\mathrm{F}a.\mathrm{F}b.\mathrm{F}c.\mathrm{F}d = \mathrm{FA}^2.\mathrm{FB}^2 = \text{constante}.$$

Or ce produit est indépendant de la parabole que l'on considère. Donc le théorème est démontré.

On démontre, par d'autres considérations, que si les points A et B sont deux sommets opposés d'un quadrilatère circonscrit à une conique dont les foyers sont φ et φ', on a toujours la relation

$$\mathrm{FA}.\mathrm{FB} = \mathrm{F}\varphi.\mathrm{F}\varphi',$$

F étant comme ci-dessus le foyer d'une parabole inscrite dans ce même quadrilatère. On a donc

$$\mathrm{F}a.\mathrm{F}b.\mathrm{F}c.\mathrm{F}d = \mathrm{F}\varphi.\mathrm{F}\varphi' = \text{constante},$$

quelles que soient la conique et la parabole auxquelles est circonscrit le quadrilatère qui donne lieu aux points de contact a, b, c, d, pourvu que cette conique ait les points φ et φ' pour foyers et que la parabole ait son foyer en F.

C'est le théorème VIII de M. Steiner.