E. PROUHET

Note sur quelques identités

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 15 (1856), p. 86-91

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1856_1_15__86_1>

NOTE SUR QUELQUES IDENTITÉS;

PAR M. E. PROUHET.

Je me propose de démontrer quelques identités curieuses énoncées sans démonstration par M. Oscar Weber, professeur à Dresde (*Archives de Grunert*, t. XXXII, p. 853; 1854).

Afin d'éviter une trop grande complication, je prendrai un exemple particulier, mais on verra sans peine que le même raisonnement convient à tous les cas.

Soient a, b, c, d, e, f six quantités inégales et que nous supposerons racines de l'équation

$$x^6 + P_1 x^5 + P_2 x^4 + P_3 x^3 + P_4 x^2 + P_5 x + P_6 = 0.$$

Considérons le tableau formé des diverses puissances de ces quantités

$$\begin{array}{ccccccc}
a^6 & a^5 & a^4 & a^3 & a^2 & a & a^0 \\
b^6 & b^5 & b^4 & b^3 & b^2 & b & b^0 \\
c^6 & c^5 & c^4 & c^3 & c^2 & c & c^0 \\
d^6 & d^5 & d^4 & d^3 & d^2 & d & d^0 \\
e^6 & e^5 & e^4 & e^3 & e^2 & e & e^0 \\
f^6 & f^5 & f^4 & f^3 & f^2 & f & f^0
\end{array}$$

(*) Chez Mallet-Bachelier, quai des Augustins, 55. Prix: 3f 50c.

Ce tableau renferme quarante-deux termes, de sorte que si l'on enlève une des colonnes verticales, il restera trente-six quantités avec lesquelles on pourra former un déterminant. Je nomme D le déterminant que l'on obtient après avoir supprimé la première colonne à gauche, D_1 celui qu'on obtient en supprimant la seconde, et ainsi de suite.

D'après un théorème de Vandermonde (*A. S.*, 1772, 2^{e} partie, p. 522), on a

$$D = (a-b)(a-c)\ldots(a-f)(b-c)\ldots(b-f)\ldots(e-f).$$

D'après un second théorème du même géomètre (*Ibid*, p. 254), on a

$$D_1 = \sum a^6 \times \begin{bmatrix} b^4 & b^3 & b^2 & b & b^0 \\ c^4 & c^3 & c^2 & c & c^0 \\ d^4 & d^3 & d^2 & d & d^0 \\ e^4 & e^3 & e^2 & e & e^0 \\ f^4 & f^3 & f^2 & f & f^0 \end{bmatrix}.$$

Les déterminants compris sous le signe $\sum$ ont tantôt le signe $+$, tantôt le signe $-$. Cette particularité n'ayant aucune importance pour l'objet que j'ai en vue, je me contenterai de remarquer que le terme exprimé a le signe $+$.

D'après le premier théorème de Vandermonde, on peut encore écrire

$$D_1 = \sum a^6 (b-c)(b-d)\ldots(b-f)\ldots(e-f),$$

on aura ensuite

$$D_2 = \sum \begin{bmatrix} a^6 & a^5 \\ b^6 & b^5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} c^3 & c^2 & c & c^0 \\ d^3 & d^2 & d & d^0 \\ e^3 & e^2 & e & e^0 \\ f^3 & f^2 & f & f^0 \end{bmatrix},$$

et, par conséquent,

$$D_2 = \sum a^5\, b^5 (a-b)(c-d)(c-e)(c-f)\ldots(e-f);$$

on aura aussi

$$D_3 = \sum \begin{bmatrix} a^6 & a^5 & a^4 \\ b^6 & b^5 & b^4 \\ c^6 & c^5 & c^4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} d^2 & d & d^0 \\ e^2 & e & e^0 \\ f^2 & f & f^0 \end{bmatrix}$$

ou bien

$$D_3 = \sum a^4\, b^4\, c^4 (a-b)(a-c)(b-c)(d-e)(d-f)(e-f),$$

et ainsi de suite.

Ces préliminaires admis, soit à résoudre le système des équations suivantes :

$$\begin{array}{l} P_1 a^5 + P_2 a^4 + P_3 a^3 + P_4 a^2 + P_5 a + P_6 = -a^6, \\ P_1 b^5 + P_2 b^4 + P_3 b^3 + P_4 b^2 + P_5 b + P_6 = -b^6, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ P_1 f^5 + P_2 f^4 + P_3 f^3 + P_4 f^2 + P_5 f + P_6 = -f^6, \end{array}$$

où l'on considère P_1, P_2, etc., comme des inconnues. Le dénominateur commun de ces inconnues sera D : le numérateur de la valeur de P_1 sera le déterminant D_1 dans lequel on aurait changé de signe tous les termes de la première colonne. On aura donc

$$P_1 = -\frac{D_1}{D},$$

ou, en substituant les valeurs de D et de D_1 trouvées plus haut et réduisant,

$$(1)\quad a + b + c + \ldots + f = \sum \frac{a^6}{(a-b)(a-c)(a-d)(a-e)(a-f)}.$$

Le numérateur de P_2 sera le déterminant D_2 dans lequel on aurait transporté la première colonne à la seconde place en changeant les signes de tous ses termes, ce qui n'altère pas la valeur de ce déterminant.

On aura donc

$$P_2 = \frac{D_2}{D},$$

ou, en réduisant,

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} & ab + ac + \ldots + ef \\ & = \sum \frac{a^5\, b^5}{(a-c)(a-d)\ldots(a-f)(b-c)\ldots(b-f)}. \end{aligned}\right.$$

On aura de même

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} & abc + abd + \ldots + def \\ & = \sum \frac{a^4\, b^4\, c^4}{(a-d)(a-e)(a-f)(b-d)\ldots(c-f)}, \end{aligned}\right.$$

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} & abcd + abce + \ldots + cdef \\ & = \sum \frac{a^3\, b^3\, c^3\, d^3}{(a-e)(a-f)(b-e)(b-f)\ldots(d-f)}, \end{aligned}\right.$$

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} & abcde + \ldots + bcdef \\ & = \sum \frac{a^2\, b^2\, c^2\, d^2\, e^2}{(a-f)(b-f)(c-f)(d-f)(e-f)}. \end{aligned}\right.$$

Les formules (1), (2),..., (5) sont celles de M. Weber. On peut les renfermer dans le théorème suivant :

Si

$$a,\ b,\ c,\ \ldots,\ f,\ g,\ \ldots,\ l$$

sont m *quantités inégales et racines de l'équation*

$$f(x) = 0,$$

la somme des produits de ces racines prises n *à* n *sera* *égale à*

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \sum \frac{(abc\ldots fg)^{m-n+1}(a-l)^2(a-c)^2\ldots(f-g)^2}{f'(a)\,f'(b)\ldots f'(g)}.$$

Un peu d'attention suffira pour voir que cet énoncé comprend toutes les formules particulières que nous venons de démontrer.

Note du Rédacteur. Ces identités sont d'utiles exercices de calcul à donner aux élèves ; développons-en quelques-unes :

$$a+b=\frac{a^2}{a-b}+\frac{b^2}{b-a},$$

$$a+b+c=\frac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^3}{(b-a)(b-c)}$$
$$+\frac{c^3}{(c-a)(c-b)},$$

$$a+b+c+d=\frac{a^4}{(a-b)(a-c)(a-d)}$$
$$+\frac{b^4}{(b-a)(b-c)(b-d)}$$
$$+\frac{c^4}{(c-a)(c-b)(c-d)}$$
$$+\frac{d^4}{(d-a)(d-b)(d-c)},$$

etc. ;

$$ab+ac+bc=\frac{a^2b^2}{(a-c)(b-c)}$$
$$+\frac{a^2c^2}{(a-b)(c-b)}$$
$$+\frac{b^2c^2}{(b-a)(c-a)},$$

$$ab + ac + ad + bc + bd + cd = \frac{a^3 b^3}{(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)}$$

$$+ \frac{a^3 c^3}{(a-b)(a-d)(c-b)(c-d)}$$

$$+ \frac{a^3 d^3}{(a-b)(a-c)(d-b)(d-c)}$$

etc.;

$$abc + abd + acd + bcd = \frac{a^2 b^2 c^2}{(a-d)(b-d)(c-d)}$$

$$+ \frac{a^2 b^2 d^2}{(a-c)(b-c)(d-c)}$$

$$+ \frac{a^2 c^2 d^2}{(a-c)(c-b)(c-d)}$$

$$+ \frac{b^2 c^2 d^2}{(b-a)(c-a)(d-a)}$$

etc.