

COMBESURE

Solution de la question 308

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 15
(1856), p. 46-50

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1856_1_15__46_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1856, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DE LA QUESTION 508 ;

PAR M. COMBESURE,

Professeur au lycée de Bourges.

Inscrire dans un arc de section conique trois cordes consécutives formant trois segments équivalents.

(CHASLES.)

1°. *Parabole.* L'équation de la parabole rapportée à son axe et à la tangente au sommet étant

$$y^2 = 2px,$$

un segment correspondant aux points (x_1, y_1) , (x_2, y_2) aura pour expression

$$\frac{2}{3}x_2y_2 - \frac{(x_2 - x_1)(y_2 + y_1)}{2} - \frac{2}{3}x_1y_1$$

ou

$$\frac{1}{6}(x_2y_2 - x_1y_1) + \frac{1}{2}(x_1y_2 - y_1x_2),$$

ou, à cause de l'équation de la parabole,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4p} \left\{ \frac{y_2^3 - y_1^3}{3} + y_1^2y_2 - y_2y_1^2 \right\} \\ &= \frac{(y_2 - y_1)}{4p} \left\{ \frac{y_2^2 + y_1y_2 + y_1^2}{3} - y_1y_2 \right\} = \frac{(y_2 - y_1)^3}{12p}. \end{aligned}$$

Donc si l'on veut inscrire dans un arc de parabole n cordes successives donnant lieu à n segments égaux, il suffira de diviser la partie $y_{n+1} - y$ de l'axe des y , qui représente la projection de l'arc, en n parties égales, et de mener des parallèles à l'axe par les points de division. La jonction successive des points où ces parallèles coupent la parabole donnera lieu aux segments demandés.

2°. *Hyperbole.* On peut se borner à l'hyperbole équilatère, sauf à transporter la solution à une hyperbole quelconque au moyen d'une projection cylindrique. Soit donc

$$xy = a^2$$

l'équation d'une pareille hyperbole. Un segment a pour mesure

$$\frac{(x_2 - x_1)}{2} (y_2 + y_1) - a^2 \log \frac{x_2}{x_1},$$

x_1, y_1, x_2, y_2 désignant les coordonnées des extrémités de l'arc. D'après l'équation de l'hyperbole, cette expression peut s'écrire

$$a^2 \left\{ \frac{x_2^2 - x_1^2}{x_1 x_2} - \log \frac{x_2}{x_1} \right\}$$

ou

$$a^2 \left\{ \frac{x_2}{x_1} - \frac{x_1}{x_2} - \log \frac{x_2}{x_1} \right\}.$$

Donc, si l'on considère n segments successifs et que l'on pose

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{x_3}{x_2} = \frac{x_4}{x_3} = \dots = \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{z}{m},$$

d'où

$$z^m - m^n \frac{x_{n+1}}{x_1} = 0,$$

tous les segments dont il s'agit seront équivalents. On voit que la division d'un arc en n parties répondant à n segments équivalents, revient à l'insertion de n moyens proportionnels entre les abscisses extrêmes x_1 et x_{n+1} . On reconnaît d'ailleurs tout de suite, sur la figure, que le mode de division est unique. Dans le cas de $n = 3$, en écrivant x pour z , on aura à résoudre l'équation

$$x^3 = m^3 \frac{x_4}{x_1};$$

ou, en posant

$$\frac{m^3 x_4}{x_1} = a^3,$$

à chercher l'intersection de la parabole

$$x^2 = my$$

et de l'hyperbole donnée

$$xy = a^2.$$

Quant à m , on prendra la quatrième proportionnelle

$$a_1 = \frac{ax_1}{x_4},$$

puis la moyenne proportionnelle

$$m^2 = aa_1$$

Si α désigne l'abscisse du point d'intersection de la parabole auxiliaire avec l'hyperbole donnée, on aura par des quatrièmes proportionnelles,

$$x_2 = \frac{\alpha x_1}{m}, \quad x_3 = \frac{\alpha x_2}{m}.$$

3°. *Ellipse*. L'équation de la courbe étant

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

si l'on décrit un cercle sur le grand axe comme diamètre, les ordonnées Y_1, Y_2 qui répondent sur ce cercle aux abscisses x_1, x_2 des points $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ de l'ellipse déterminent avec l'axe du cercle correspondant et l'axe des x une aire qui est l'aire elliptique homologue dans le rapport de a à b . En désignant par φ_1, φ_2 les angles que les rayons du cercle relatifs aux deux extrémités de l'arc circulaire font avec l'axe des y , l'aire elliptique dont il s'agit aura donc pour expression

$$\frac{b}{a} \left[a^2 (\varphi_2 - \varphi_1) - \frac{a^2}{2} \sin (\varphi_2 - \varphi_1) + \frac{Y_2 + Y_1}{2} (x_2 - x_1) \right],$$

c'est-à-dire

$$ab \left[(\varphi_2 - \varphi_1) - \frac{1}{2} \sin (\varphi_2 - \varphi_1) \right] + \left(\frac{y_1 + y_2}{2} \right) (x_2 - x_1).$$

Le segment elliptique a donc pour expression de sa mesure

$$ab \left[(\varphi_2 - \varphi_1) - \frac{1}{2} \sin (\varphi_2 - \varphi_1) \right].$$

Donc, si l'on veut diviser un arc d'ellipse en n parties telles, que les segments correspondants soient égaux, il suffira de prendre, attendu que le mode de division est unique,

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \varphi_3 - \varphi_2 = \dots = \varphi_{n+1} - \varphi_n,$$

c'est-à-dire qu'il faudra diviser en n parties égales l'arc de cercle déterminé, comme il a été dit, par les ordonnées extrêmes. Les perpendiculaires à l'axe des x menées par les points de division détermineront sur l'arc elliptique les points dont la jonction successive donnera la solution de la question. Dans le cas de $n = 3$, la trisection de l'angle

(50)

peut se faire, comme on sait, de diverses manières par l'intersection de coniques. Je ne m'arrêterai pas là-dessus.
