NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

BRIOSCHI

Deux théorèmes de géométrie sur la droite et le cercle

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 15 (1856), p. 462-464

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1856_1_15__462_0>

DEUX THÉORÈMES DE GÉOMÉTRIE SUR LA DROITE ET LE CERCLE;

PAR M. BRIOSCHI,
Professeur à l'université de Pavie.

1°. Soient

$$\frac{x - a_r}{\alpha_r} = \frac{y - b_r}{\beta_r} = \frac{z - c_r}{\gamma_r}$$

les équations d'une droite l_r. Si l'on pose

$$A_r = b_r \gamma_r - c_r \beta_r,$$
$$B_r = c_r \alpha_r - a_r \gamma_r,$$
$$C_r = a_r \beta_r - b_r \alpha_r,$$

les conditions pour que quatre droites l_1, l_2, l_3, l_4 soient génératrices d'un même hyperboloïde à une nappe sont données par l'équation

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 \end{vmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire par les équations qu'on obtient en égalant à zéro chacun des déterminants du quatrième ordre qu'on déduit de cette forme. On sait que cela conduit à trois seules équations indépendantes (*).

(*) Ces lettres prises quatre à quatre donnent quinze déterminants du quatrième ordre qui se réduisent à trois, savoir $A_1, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $B_1, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $C_1, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1$. TM.

La condition analogue dans la géométrie plane est

$$\begin{vmatrix} C_1 & \alpha_1 & \beta_1 \\ C_2 & \alpha_2 & \beta_2 \\ C_3 & \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix} = 0,$$

laquelle est vérifiée lorsque les trois droites l_1, l_2, l_3 passent par un même point.

2°. Trois cercles A, B, C étant donnés dans le même plan, soient :

$$l = 0$$

l'équation de la droite qui passe par les centres des cercles B, C;

$$m = 0$$

l'équation de la droite qui passe par les centres des cercles C, A;

$$n = 0$$

l'équation de la droite qui passe par les centres des cercles A, B; et

$$\lambda = 0, \quad \mu = 0, \quad \nu = 0$$

les équations des polaires de l'origine par rapport à chacun des cercles A, B, C : l'équation

$$l\lambda + m\mu + n\nu = 0$$

représente le cercle orthotomique aux trois cercles donnés.

Observation. L'équation de ce lieu géométrique a été donnée récemment par M. Salmon (*Quarterly Journal of pure and applied mathematics*, dec. 1855) sous la forme

$$\begin{vmatrix} \frac{dA}{dx}, & \frac{dA}{dy}, & \frac{dA}{dz} \\ \frac{dB}{dx}, & \frac{dB}{dy}, & \frac{dB}{dz} \\ \frac{dC}{dx}, & \frac{dC}{dy}, & \frac{dC}{dz} \end{vmatrix} = 0,$$

$A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ étant les équations des cercles.

On peut assez facilement passer de l'une à l'autre forme.