NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

BRIOSCHI

# Solution de la question 294

*Nouvelles annales de mathématiques 1re série*, tome 15 (1856), p. 459-461

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1856_1_15__459_0>

## SOLUTION DE LA QUESTION 294

(voir t. XIII, p. 305);

PAR M. BRIOSCHI,
Professeur à l'université de Pavie.

---

Soient $P_1$, $P_2$, $P_3$,..., $P_n$, $n$ points matériels d'égales masses; $G_2$ le centre de gravité de $P_1$ et $P_2$; $G_3$ le centre de gravité de $P_3$ et de la masse $P_1 + P_2$ posée en $G_2$; $G_4$ le centre de gravité de $P_4$ et de $P_1 + P_2 + P_3$ posées en $G_3$, et ainsi de suite; de sorte que $G_n$ est le centre de gravité de $P_n$ et de $P_{n-1}$; $G_n$ est indépendant de la manière dont on prend les masses; désignons par $A_{(i)}$ la distance de $G_{i-1}$ à $P_i$, la quantité

$$\frac{1}{2}(A_2)^2 + \frac{2}{3}(A_3)^2 + \frac{3}{4}(A_4)^2 + \ldots + \left(\frac{n-1}{n}\right) A_n^2$$

est constante, dans quelque ordre qu'on prenne les masses. (STEINER.)

*Observation.* $G_1$ est la même chose que $P_1$ : ainsi $A_2$ est la distance de $P_1$ à $P_2$.

Soient $x_r$, $y_r$, $z_r$ les coordonnées rectangulaires du point $P_r$; $\alpha_r$, $\beta_r$, $\gamma_r$ celles du point $G_r$. On a

$$\alpha_r = \frac{1}{r}\sum_1^r {}_s\, x_s \text{ (*)}, \quad \beta_r = \frac{1}{r}\sum_1^r {}_s\, y_s, \quad \gamma_r = \frac{1}{r}\sum_1^r {}_s\, z_s,$$

---

(*) $\sum_1^r {}_s$ signifie qu'il faut donner à $s$ toutes les valeurs de la suite $1, 2, 3, \ldots, r$. TM.

et

$$A_r^2 = (\alpha_{r-1} - x_r)^2 + (\beta_{r-1} - y_r)^2 + (\gamma_{r-1} - z_r)^2.$$

En substituant les valeurs ci-dessus, on aura

$$(r-1)^2 A_r^2 = \left[\sum_s^{r-1} {}_{1}\, x_s - (r-1)\, x_r\right]^2 + \left[\sum_s^{r-1} {}_{1}\, y_s - (r-1)\, y_r\right]^2$$

$$+ \left[\sum_{s=1}^{r-1} z_s - (r-1)\, z_r\right]^2.$$

Mais

$$\left[\sum_{s=1}^{r-1} x_s - (r-1)x_r\right]^2$$

$$= (r-1)\sum_{s=1}^{r-1}(x_s - x_r)^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r-1}\sum_{j=1}^{r-1}(x_i - x_j)^2;$$

par conséquent, si l'on suppose

$$\left[\sum_{s=1}^{r-1} x_s - (r-1)\, x_r\right]^2 = (r-1)^2\, \delta_r^2,$$

on a

$$a_2\, \delta_2^2 + a_3\, \delta_3^2 + \ldots + a_n\, \delta_n^2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{j=1}^{i-1} (x_i - x_j)^2$$

où

$$(1)\quad \alpha_i = \frac{1}{i-1}\, a_i - \frac{1}{i^2}\, a_{i+1} - \frac{1}{(i+1)^2}\, a_{i+2} - \ldots - \frac{1}{(n-1)^2}\, a_n.$$

On en déduit tout de suite que

$$\alpha_2 A_2^2 + a_3 A_3^2 + \ldots + a_n A_n^2 = \sum_i^n{}_1 \alpha_i \sum_j^{i-1}{}_1 \delta_{i,j}^2,$$

où $\delta_{i,j}$ est la distance entre les points $P_i$, $P_j$. Le premier membre de cette équation se réduira à une constante dans quelque ordre qu'on prenne les masses, en supposant

$$\alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_n;$$

or l'équation (1) et ses analogues nous donnent

$$a_i = (i-1)\, a_i + \frac{i-1}{i}(\alpha_{i+1} + \alpha_{i+2} + \ldots + \alpha_n);$$

par conséquent, si l'on fait

$$\alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_n = m,$$

on a

$$a_i = \frac{i-1}{i} mn$$

et

$$\frac{1}{2} A_2^2 + \frac{2}{3} A_3^2 + \frac{3}{4} A_4^2 + \ldots + \frac{n-1}{n} A_n^2 = \frac{1}{2n} \sum_i^n{}_1 \sum_j^n{}_1 \delta_{i,j}^2.$$

---

*Théorème.* Il est impossible de trouver quatre carrés tels, que la somme de trois quelconques moins le quatrième fasse un carré. (EULER.)

*Théorème.* ABC, triangle sphérique; O, centre de la sphère; $V_1$, volume du parallélipipède qui a pour arêtes OA′, OB′, OC′; A′, B′, C′ sont les milieux des côtés du triangle. S étant l'aire du triangle, on a $V = \sin \frac{1}{2} S$.

(CORNÉLIUS KEOGH.)

---