

BRIOSCHI

## Solution de la question 294

*Nouvelles annales de mathématiques 1<sup>re</sup> série*, tome 15  
(1856), p. 459-461

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1856\\_1\\_15\\_\\_459\\_0](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1856_1_15__459_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1856, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## SOLUTION DE LA QUESTION 294

(voir t. XIII, p. 308);

PAR M. BRIOSCHI,

Professeur à l'université de Pavie.

Soient  $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ ,  $n$  points matériels d'égales masses;  $G_2$  le centre de gravité de  $P_1$  et  $P_2$ ;  $G_3$  le centre de gravité de  $P_3$  et de la masse  $P_1 + P_2$  posée en  $G_2$ ;  $G_4$  le centre de gravité de  $P_4$  et de  $P_1 + P_2 + P_3$  posées en  $G_3$ , et ainsi de suite; de sorte que  $G_n$  est le centre de gravité de  $P_n$  et de  $P_{n-1}$ ;  $G_n$  est indépendant de la manière dont on prend les masses; désignons par  $A_{(i)}$  la distance de  $G_{i-1}$  à  $P_i$ , la quantité

$$\frac{1}{2} (A_2)^2 + \frac{2}{3} (A_3)^2 + \frac{3}{4} (A_4)^2 + \dots + \left(\frac{n-1}{n}\right) A_n^2$$

est constante, dans quelque ordre qu'on prenne les masses. (STEINER.)

*Observation.*  $G_1$  est la même chose que  $P_1$ : ainsi  $A_2$  est la distance de  $P_1$  à  $P_2$ .

Soient  $x_r, y_r, z_r$  les coordonnées rectangulaires du point  $P_r$ ;  $\alpha_r, \beta_r, \gamma_r$  celles du point  $G_r$ . On a

$$\alpha_r = \frac{1}{r} \sum_{s=1}^r x_s (*), \quad \beta_r = \frac{1}{r} \sum_{s=1}^r y_s, \quad \gamma_r = \frac{1}{r} \sum_{s=1}^r z_s,$$

(\*)  $\sum_{s=1}^r$  signifie qu'il faut donner à  $s$  toutes les valeurs de la suite

1, 2, 3, ...,  $r$ .

1M.

et

$$A_r^2 = (\alpha_{r-1} - x_r)^2 + (\beta_{r-1} - y_r)^2 + (\gamma_{r-1} - z_r)^2.$$

En substituant les valeurs ci-dessus, on aura

$$\begin{aligned} (r-1)^2 A_r^2 &= \left[ \sum_1^{r-1} x_s - (r-1)x_r \right]^2 + \left[ \sum_1^{r-1} y_s - (r-1)y_r \right]^2 \\ &+ \left[ \sum_1^{r-1} z_s - (r-1)z_r \right]^2. \end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned} &\left[ \sum_1^{r-1} x_s - (r-1)x_r \right]^2 \\ &= (r-1) \sum_1^{r-1} (x_s - x_r)^2 - \frac{1}{2} \sum_1^{r-1} \sum_1^{r-1} (x_i - x_j)^2; \end{aligned}$$

par conséquent, si l'on suppose

$$\left[ \sum_1^{r-1} x_s - (r-1)x_r \right]^2 = (r-1)^2 \delta_r^2,$$

on a

$$a_2 \delta_2^2 + a_3 \delta_3^2 + \dots + a_n \delta_n^2 = \sum_1^n a_i \sum_1^{i-1} (x_i - x_j)^2$$

où

$$(1) \quad a_i = \frac{1}{i-1} a_i - \frac{1}{i^2} a_{i+1} - \frac{1}{(i+1)^2} a_{i+2} - \dots - \frac{1}{(n-1)^2} a_n.$$

On en déduit tout de suite que

$$\alpha_2 A_2^2 + \alpha_3 A_3^2 + \dots + \alpha_n A_n^2 = \sum_1^n \alpha_i \sum_1^{i-1} \delta_{i,j}^2,$$

où  $\delta_{i,j}$  est la distance entre les points  $P_i, P_j$ . Le premier membre de cette équation se réduira à une constante dans quelque ordre qu'on prenne les masses, en supposant

$$\alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_n;$$

or l'équation (1) et ses analogues nous donnent

$$a_i = (i-1) a_i + \frac{i-1}{i} (\alpha_{i+1} + \alpha_{i+2} + \dots + \alpha_n);$$

par conséquent, si l'on fait

$$\alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_n = m,$$

on a

$$a_i = \frac{i-1}{i} mn$$

et

$$\frac{1}{2} A_2^2 + \frac{2}{3} A_3^2 + \frac{3}{4} A_4^2 + \dots + \frac{n-1}{n} A_n^2 = \frac{1}{2n} \sum_1^n \sum_1^n \delta_{i,j}^2.$$

*Théorème.* Il est impossible de trouver quatre carrés tels, que la somme de trois quelconques moins le quatrième fasse un carré. (EULER.)

*Théorème.* ABC, triangle sphérique; O, centre de la sphère;  $V_1$ , volume du parallélépipède qui a pour arêtes OA', OB', OC'; A', B', C' sont les milieux des côtés du triangle. S étant l'aire du triangle, on a  $V = \sin \frac{1}{2} S$ .

(CORNELIUS KEOGH.)