GERONO

Notes sur quelques questions du programme officiel

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 15 (1856), p. 430-440

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1856_1_15__430_1>

NOTES SUR QUELQUES QUESTIONS DU PROGRAMME OFFICIEL.

III.

Simplification de l'équation générale du second degré par la transformation des coordonnées.

La réduction de l'équation générale du second degré à trois variables, telle qu'elle est ordinairement exposée, dépend de la théorie des *plans principaux*. Pour parvenir à cette réduction, on a fait un raisonnement qui contient à la fois les deux assertions suivantes : « Dans toute sur- » face du second degré il y a au moins un système de » cordes *principales*; — le plan qui divise ces cordes en » parties égales peut être *à une distance infinie*. » Nous n'avons aucune objection à faire contre une manière de parler dont le sens est connu de ceux qui s'en servent, nous dirons seulement que la forme qu'on a donnée au raisonnement dont il s'agit met, assez mal à propos, en doute l'existence d'un plan principal, puisqu'en réalité ce plan existe et que c'est précisément en le prenant pour plan de coordonnées qu'on arrive par le moyen le plus simple et le plus direct aux simplifications proposées.

Il nous a donc semblé utile d'établir à priori cette proposition fondamentale :

Dans toute surface du second degré il y a au moins un plan diamétral perpendiculaire aux cordes qu'il divise en parties égales.

Nous prévenons que par cette dénomination de *corde*, nous entendons une droite *limitée*, dont les deux extrémités se trouvent sur la surface que l'on considère. Il est clair qu'un plan qui divise en parties égales un système de cordes ne peut jamais être *à une distance infinie.*

De plus, il sera supposé que l'équation générale

$$(1)\quad \left\{ \begin{array}{l} Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz \\ + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + 2C''z + F = 0 \end{array} \right.$$

représente une surface réelle et du second degré; ainsi les coefficients A, A', A'', B, B', B'' ne seront pas nuls à la fois.

1. Pour que la surface représentée par l'équation (1) admette des cordes parallèles à une direction définie par les équations

$$x = mz,\quad y = nz,$$

il suffit que la substitution de mz et nz à x et y dans les termes du second degré de l'équation (1) donne à z^2 un coefficient autre que zéro. Car si le coefficient de z^2 n'est pas nul, les équations du second degré qui déterminent les points d'intersection de la surface et des droites parallèles à la direction $[x = mz,\ y = nz]$ n'auront aucune racine infinie. Et par conséquent, en menant par les différents points de la surface des parallèles à

$$[x = mz,\ y = nz],$$

ces droites rencontreront chacune la surface en un second point (*); donc, elles détermineront un système de cordes.

On voit de même que si le coefficient de z^2 était nul, la surface n'admettrait pas de cordes parallèles à la direction définie par les valeurs de m et de n.

La substitution de mz, nz à x, y dans l'équation (1) donne à z^2 le coefficient

$$Am^2 + A'n^2 + A'' + 2Bn + 2B'm + 2B''mn$$

ou

$$\begin{aligned}(Am + B''n + B')m + (B''m + A'n + B)n \\ + (B'm + Bn + A'');\end{aligned}$$

ainsi, la condition nécessaire et suffisante pour que la surface admette des cordes parallèles à la droite $[x = mz, y = nz]$ consiste dans l'inégalité

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}(Am + B''n + B')m + (B''m + A'n + B)n \\ + (B'm + Bn + A'') \gtrless 0.\end{aligned}\right.$$

Quand cette inégalité a lieu, le plan diamétral qui est représenté par l'équation

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned}(Am + B''n + B')x + (B''m + A'n + B)y \\ + (B'm + Bn + A'')z + Cm + C'n + C'' = 0,\end{aligned}\right.$$

ne peut être *à une distance infinie;* cela résulte évidemment de ce que les milieux des cordes sont à des distances finies, et d'ailleurs l'inégalité (2) montre qu'on n'a pas à

(*) Il y a toutefois exception pour les points où les droites considérées seraient tangentes à la surface.

la fois

$$\mathrm{A}m + \mathrm{B}''n + \mathrm{B}' = 0,$$

$$\mathrm{B}''m + \mathrm{A}'n + \mathrm{B} = 0,$$

$$\mathrm{B}'m + \mathrm{B}n + \mathrm{A}'' = 0.$$

2. Occupons-nous maintenant des plans principaux.

Quand les coordonnées sont rectangulaires, pour que le plan diamétral (3) soit perpendiculaire aux cordes qu'il divise en parties égales, il faut qu'on ait

$$(\mathrm{A}m + \mathrm{B}''n + \mathrm{B}') = (\mathrm{B}'m + \mathrm{B}n + \mathrm{A}'')m$$

et

$$(\mathrm{B}''m + \mathrm{A}'n + \mathrm{B}) = (\mathrm{B}'m + \mathrm{B}n + \mathrm{A}'')n;$$

ou, en posant $\mathrm{B}'m + \mathrm{B}n + \mathrm{A}'' = s$, il faut qu'on ait :

$$\mathrm{A}m + \mathrm{B}''n + \mathrm{B}' = sm$$

et

$$\mathrm{B}''m + \mathrm{A}'n + \mathrm{B} = sn.$$

Ces dernières équations reviennent à

$$(s - \mathrm{A})m - \mathrm{B}''n - \mathrm{B}' = 0,$$
$$(s - \mathrm{A}')n - \mathrm{B}''m - \mathrm{B} = 0$$

et donnent

$$(4) \qquad m = \frac{\mathrm{B}'(s - \mathrm{A}') + \mathrm{B}\mathrm{B}''}{(s - \mathrm{A})(s - \mathrm{A}') - \mathrm{B}''^2},$$

$$(5) \qquad n = \frac{\mathrm{B}(s - \mathrm{A}) + \mathrm{B}'\mathrm{B}''}{(s - \mathrm{A})(s - \mathrm{A}') - \mathrm{B}''^2}.$$

En remplaçant m et n par les expressions précédentes dans l'équation

$$\mathrm{B}'m + \mathrm{B}n + \mathrm{A}'' = s,$$

que l'on peut écrire ainsi :

$$(s - \mathrm{A}'') - \mathrm{B}n - \mathrm{B}'m = 0,$$

il vient

$$(6)\quad \left\{ \begin{array}{c} (s - A'')[(s - A)(s - A') - B''^2] \\ -[B^2(s - A) + B'^2(s - A') + 2BB'B''] = 0. \end{array} \right.$$

Puis, en effectuant les multiplications indiquées et ordonnant, on a l'équation

$$(7)\quad \left\{ \begin{array}{c} s^3 - [A + A' + A'']s^2 \\ + [AA' + AA'' + A'A'' - B^2 - B'^2 - B''^2]s - D = 0, \end{array} \right.$$

dans laquelle D représente le polynôme

$$AA'A'' + 2BB'B'' - AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2.$$

A chaque racine de l'équation (7), réelle et différente de zéro, correspond au moins un système de cordes principales, et, par conséquent, au moins un plan principal.

En effet, si la racine s est réelle, les valeurs de m et n, (4) et (5), ne peuvent être imaginaires; donc la droite

$$[x = mz,\ \ y = nz]$$

existe. De plus, la surface admet nécessairement des cordes parallèles à cette droite, si s n'est pas nulle, car en vertu des relations

$$B'm + Bn + A'' = s,$$

$$Am + B''n + B' = sm,$$

$$B''n + A'n + B = sn,$$

l'inégalité (2) (page 432) devient

$$(m^2 + n^2 + 1)s \gtrless 0:$$

et il est évident que cette inégalité a lieu lorsque s est différente de zéro.

Quant à l'équation du plan principal correspondant, on l'aura sous sa forme la plus simple en remplaçant dans l'équation (3) les trinômes

$$B'm + Bn + A'',$$
$$Am + B''n + B',$$
$$B''m + A'n + B$$

par s, sm, sn. Cette substitution donne

$$(8) \qquad (mx + ny + z)s + Cm + C'n + C'' = 0$$

S'il paraît utile de faire entrer dans l'équation de ce plan les cosinus α, 6, γ des angles que la direction des cordes $[x = mz, y = nz]$ forme avec les axes des x, y, z on substituera à m, n les rapports $\frac{\alpha}{\gamma}$, $\frac{6}{\gamma}$; et l'équation précédente deviendra

$$(9) \qquad (\alpha x + 6y + \gamma z)s + C\alpha + C'6 + C''\gamma = 0.$$

Les valeurs de α, 6, γ satisfaisant aux conditions

$$\frac{\alpha}{\gamma} = m, \quad \frac{6}{\gamma} = n,, \quad \alpha^2 + 6^2 + \gamma^2 = 1,$$

sont nécessairement réelles et ne peuvent être nulles toutes trois. Donc si la racine s est différente de zéro, l'équation (9) représentera un plan qui n'est pas *à une distance infinie.*

D'après cela, pour démontrer que la surface a au moins un plan principal, il suffit de faire voir que l'une des trois valeurs de s est réelle et différente de zéro. Or, l'existence de cette valeur résulte des deux propositions suivantes :

1°. L'équation (7) a ses trois racines réelles;

2°. Ces trois racines ne peuvent être nulles à la fois (*).

On a donné de la première de ces propositions plu-

(*) En admettant toujours que l'équation de la surface soit du second degré, c'est-a-dire que les six coefficients A, A', A'', B, B', B'' ne soient pas nuls.

sieurs démonstrations différentes; celle que nous allons exposer est due à M. *Cauchy*.

Nous admettrons d'abord que les trois coefficients B, B′, B″ ont des valeurs différentes de zéro.

Reprenons l'équation en s sous la forme

$$(6)\quad \left\{\begin{array}{l} (s-A'')[(s-A)(s-A')-B''^2] \\ -[B^2(s-A)+B'^2(s-A')+2BB'B'']=0, \end{array}\right.$$

et nommons a, b les racines réelles et inégales de l'équation du second degré

$$(s-A)(s-A')-B''^2=0\ (*).$$

Il est facile de reconnaître que le premier membre de l'équation (6) prend le signe *plus* ou le signe *moins*, suivant qu'on substitue à l'inconnue s la plus petite ou la plus grande des racines a et b.

En effet, chacune de ces deux substitutions réduit le premier membre de (6) à

$$-[B^2(s-A)+B'^2(s-A')+2BB'B''];$$

cette expression peut s'écrire ainsi :

$$-\frac{1}{(s-A)}[B^2(s-A)^2+B'^2(s-A)(s-A')+2BB'B''(s-A)];$$

et, ayant égard à l'égalité supposée

$$(s-A)(s-A')=B''^2,$$

elle devient

$$-\frac{1}{s-A}[B^2(s-A)^2+B'^2B''^2+2BB'B''(s-A)]$$

(*) Ces racines sont $\left(\frac{A+A'}{2}\right)\pm\frac{1}{2}\sqrt{(A-A')^2+4B''^2}$, on voit qu'elles ont des valeurs réelles qui ne peuvent être égales qu'autant que $B''=0$ et $A=A'$.

ou

$$-\frac{1}{s-A}[B(s-A)+B'B''] .$$

On voit que son signe est le même que celui de $-\frac{1}{s-A}$. Or en supposant $a<b$, on a

$$(a-A)<0$$

et

$$(b-A)>0\ (*);$$

par suite

$$-\frac{1}{(a-A)}>0$$

et

$$-\frac{1}{(b-A)}<0.$$

Donc le résultat de la substitution du plus petit des deux nombres (a et b) a le signe *plus* et le résultat de l'autre substitution a le signe *moins*.

Si, de plus, on observe que le premier terme de l'équation (6) ordonnée étant positif, le premier membre de cette équation devient nécessairement positif pour de très-grandes valeurs de s, et négatif pour des valeurs convergentes vers $-\infty$, on en conclura que l'équation (6) admet une racine réelle plus grande que b, une seconde racine moindre que a et une troisième comprise entre a et b.

(*) Car

$$a-A=-\frac{1}{2}\left[\sqrt{(A-A')^2+4B''^2}+(A-A')\right]$$

et

$$b-A=\frac{1}{2}\left[\sqrt{(A-A')^2+4B''^2}-(A-A')\right].$$

La démonstration précédente suppose que l'expression

$$-\frac{1}{(s-A)}[B(s-A)+B'B'']^2$$

ne se réduit à zéro pour aucune des deux substitutions de a et b à s. Si l'un des deux nombres a, b, par exemple a, annulait cette expression, le nombre a serait évidemment racine de l'équation (6); la racine plus grande que b existerait encore : il n'en faut pas davantage pour que l'équation ait ses trois racines réelles.

Dans la réduction de l'expression

$$-[B^2(s-A)+B'^2(s-A')+2BB'B'']$$

à la forme

$$-\frac{1}{(s-A)}[B(s-A)+B'B'']^2,$$

il a été implicitement admis que les substitutions de a et b à s n'annulent pas $s-A$; ce qui exige que B'' ne soit pas nul (*). Si $B''=0$ et qu'il n'en soit pas de même des deux autres coefficients B, B', il suffira, pour que le raisonnement qu'on a fait soit encore applicable, de donner à l'équation (7) l'une ou l'autre des deux formes

$$\begin{gathered}(s-A)[(s-A')(s-A'')-B^2]\\ -[B'^2(s-A')+B''^2(s-A'')+2BB'B'']=0,\\ (s-A')[(s-A)(s-A'')-B'^2]\\ -[B^2(s-A)+B''^2(s-A'')+2BB'B'']=0\end{gathered}$$

Lorsque deux des coefficients B, B', B'' sont nuls, par

(*) Quand B'' est nul, l'équation du second degré

$$(s-A)(s-A')-B''^2=0,$$

dont les racines ont été désignées par a et b, donne

$$s=A \qquad s=A',$$

Donc l'un des deux nombres a, b, substitués à s réduit à zéro le facteur $s-A$.

exemple B, B′, l'équation (6) devient

$$(s - A'')[(s - A)(s - A') - B''^2] = 0,$$

elle a pour racines A″, a, b.

Enfin lorsqu'on a

$$B = 0, \quad B' = 0, \quad B'' = 0,$$

l'équation proposée se réduit à

$$(s - A)(s - A')(s - A'') = 0,$$

et les valeurs de s sont A, A′, A″.

Ainsi dans tous les cas les racines de l'équation en s sont réelles.

Il reste à démontrer qu'elles ne peuvent être nulles toutes trois lorsque la surface considérée est du second degré.

Si les trois racines de l'équation

$$s^3 - (A + A' + A'')s^2$$
$$+ (AA' + AA'' + A'A'' - B^2 - B'^2 - B''^2)s - D = 0$$

étaient nulles, on aurait les égalités

$$A + A' + A'' = 0,$$
$$AA' + AA'' + A'A'' - B^2 - B'^2 - B''^2 = 0, \quad D = 0,$$

et comme, en retranchant du carré de la première le double de la seconde, il vient

$$A^2 + A'^2 + A''^2 + 2B^2 + 2B'^2 + 2B''^2 = 0,$$

il faudrait que les six coefficients A, A′, A″, B, B′, B″ fussent nuls. Par conséquent, l'équation de la surface se réduirait au premier degré; ce qui est contraire à l'hypothèse.

Il est donc démontré que, dans toute surface du second degré, il y a au moins un plan principal. Et on sait comment en plaçant dans ce plan deux des axes coordonnés l'équation générale de la surface peut être réduite à sa forme la plus simple (*). G.