NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. DE JONQUIÈRES

Problème sur les courbes du quatrième ordre

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 15 (1856), p. 370-373

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1856_1_15__370_1>

PROBLÈME SUR LES COURBES DU QUATRIÈME ORDRE;

PAR M. E. DE JONQUIÈRES.

PROBLÈME. *Construire géométriquement la courbe du quatrième ordre qui passe par quatorze points donnés en supposant que huit de ces points soient situés sur une même conique.*

Soient a, b, c, d, e, f, g, h les huit points donnés sur une conique C, et i, k, l, m, n, o les six autres points. Il s'agit de faire passer par ces quatorze points une courbe du quatrième ordre W.

Je désignerai, pour abréger, par B l'ensemble des quatre points a, b, c, d, et par B″ celui des quatre points e, f, g, h, de telle sorte que (B, l) signifiera la conique déterminée par les cinq points a, b, c, d, l, et ainsi des autres.

La conique (B'', i) coupera la courbe du quatrième ordre W en trois autres points inconnus x, y, z. Je désignerai par B′ l'ensemble des quatre points i, x, y, z dont le point i est seul connu.

Considérons les deux faisceaux de coniques (B, B''), (B, k), (B, l), (B, m), (B, n), (B, o) et (B', B''), (B', k), (B', l), (B', m), (B', n), (B', o).

Ces courbes se correspondent deux à deux anharmoniquement, parce qu'une conique du premier faisceau, telle que (B, k) et celle (B', k) qui lui correspond dans le deuxième, passent ensemble par un même point k de la courbe W. Ceci résulte d'un théorème général démontré par M. Chasles dans les *Comptes rendus*, tome XXXVII, séance du 15 septembre 1853 (*voir* la *Note du Rédacteur*, p. 372).

Cela posé, soit P le sommet d'un faisceau de cinq droites Pk, Pl, Pm, Pn, Po correspondant anharmoniquement aux coniques (B, k), (B, l), (B, m), (B, n), (B, o) (point qu'on sait construire sans difficulté), et soit Pa' le rayon qui, dans le faisceau de droites, correspond à la conique donnée (B, B'') qui fait partie du faisceau de coniques. Enfin, appelons a' et B' les deux points d'intersection de ce rayon avec la conique (B'', i) ou (B', B'').

Les six droites Pa', Pk, Pl, Pm, Pn, Po correspondent aussi harmoniquement avec les six coniques (B', B''), (B', k), (B', l), (B', m), (B',n), (B', o), puisque celles-ci correspondent anharmoniquement, comme je viens de le dire, aux six coniques (B, B''), (B, k), (B, l), (B, m), (B, n), (B, o).

Donc les neuf points i, a', b', k, l, m, n, o, P déterminent une courbe du troisième ordre qui, en vertu du théorème fondamental de M. Chasles sur la description de ces courbes (*Comptes rendus*, 1853), passe aussi par les trois autres points x, y, z communs à toutes les coniques du faisceau (B', B''), (B', k), etc.

Cette courbe du troisième ordre U et la conique (B', B'') ont trois points communs déjà connus, savoir : i, a', et b' ; il s'agit de trouver les trois autres x, y et z.

Pour cela, joignons par une droite les deux points k et l, par exemple, et soit q le troisième point de rencontre de la droite kl avec la courbe U, point facile à déterminer sans tracer la courbe. Puis regardons l'ensemble de cette droite et de la conique (B', B'') comme formant une courbe du troisième ordre U'.

Les courbes U et U' ont six points communs déjà connus, savoir i, a', b', k, l, q; leurs trois autres points d'intersection sont précisément les points cherchés x, y, z.

La question est ainsi ramenée à celle où il s'agit de trouver les trois autres points d'intersection de deux courbes du troisième ordre qui ont six points communs connus à priori, question résolue très-simplement par M. Chasles dans les *Comptes rendus* de 1855, séance du 31 décembre, et par moi-même dans l'ouvrage intitulé : *Mélanges de Géométrie pure*, p. 193.

Dès que ces trois points x, y, z seront connus, la construction de la courbe W s'achèvera sans difficulté. Car toute conique circonscrite arbitrairement au quadrilatère *abcd* déterminera celle qui lui correspond anharmoniquement dans le faisceau circonscrit au quadrilatère *ixyz*. Les quatre points d'intersection de ces deux coniques homologues appartiendront à la courbe W, dont on construira ainsi autant de points qu'on voudra.

Ainsi le problème est résolu.

Note du Rédacteur. M. de Jonquières s'appuie sur un théorème de M. Chasles que nous croyons utile de citer textuellement.

THÉORÈME GÉNÉRAL. *Si l'on a deux faisceaux de coniques dont les unes passent par quatre points* a, b, c, d *et les autres par quatre points* a', b', c', d', *et que ces courbes se correspondent deux à deux de manière que le rapport anharmonique de quatre courbes du premier faisceau soit egal à celui de quatre courbes correspondantes dans le deuxième faisceau, le lieu de tous les points d'intersection des coniques correspondants sera* *une courbe du quatrième ordre passant par les huit points* a, b, c, d, a′, b′, c′, d (*Comptes rendus*, t. XXXVII, 1853, 2e semestre, p. 273).

Soient

$$r = 0, \quad s = 0, \quad u = 0, \quad v = 0$$

les équations de quatre côtés d'un quadrilatère ;

$$r_1 = 0, \quad s_1 = 0, \quad u_1 = 0, \quad v_1 = 0$$

les équations des quatre côtés d'un second quadrilatère : les faisceaux de coniques passant respectivement par les sommets des quadrilatères ont pour équations

$$\alpha rs + uv = 0,$$
$$\alpha r_1 s_1 + u_1 v_1 = 0.$$

Le paramètre variable α étant le même, les faisceaux se correspondent anharmoniquement. Donc, éliminant α, on a

$$rsu_1 v_1 + r_1 s_1 uv = 0,$$

pour le lieu cherché du quatrième ordre et passant par les huit sommets des quadrilatères.