NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Géométrie de l'espace. Considérations sur les courbes à double courbure

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 15 (1856), p. 357-365

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1856_1_15__357_0>

GEOMÉTRIE DE L'ESPACE.

CONSIDÉRATIONS SUR LES COURBES A DOUBLE COURBURE.

1. THÉORÈME I. *Si l'on connaît*

$$\frac{(m+1)(m+2)(m+3)-(m-n+1)(m-n+2)(m-n+3)}{1.2.3}-1$$

groupes de trois valeurs qui satisfont en même temps à deux équations dont l'une s'élève au degré m *et l'autre au degré* n (m *n'est pas inférieur à* n), *on en déduira une infinité de pareils groupes sans avoir recours à ces équations* (Plucker, *Nouvelles Annales*, tome VII, page 266).

THÉORÈME II. *Soit*

$$F_1=0,\quad F_2=0,\ldots,\quad F_n=0$$

un système de n *équations homogènes littérales entre les* n *inconnues* $x_1, x_2,\ldots x_n$; F_1 *est du degré* p_1, F_2 *du degré* p_2, F_n *du degré* p_n. *Faisons*

$$p_1p_2p_3\ldots p_n=P;$$

en éliminant les inconnues, on parvient à une équation homogène entre les coefficients. Les coefficients de F_1 *montent dans chaque terme au degré* $\frac{P}{p_1}$, *les coefficients de* F_2 *au degré* $\frac{P}{p_2}$, *etc., conséquemment le degré de l'équation est*

$$P\left(\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\ldots+\frac{1}{p_n}\right)$$

(Cayley, *Nouvelles Annales*, tome XII, page 396).

Observation. Cette propriété a même lieu pour des équations non homogènes, car on les rendra telles en remplaçant x, y, z, etc., par $\frac{x}{u}, \frac{y}{u}, \frac{z}{u}$, etc.; cela ne change pas les coefficients.

2. Une ligne algébrique est donnée par l'intersection de deux surfaces algébriques; le degré de la ligne est égal au produit des degrés des deux surfaces : ainsi une courbe n'est pas connue en énonçant seulement son degré, il faut encore énoncer les deux facteurs dont le produit donne ce degré. Représentons par S_m une surface de degré m; alors une courbe du vingt-quatrième degré peut résulter des intersections de ces couples de surfaces S_1 et S_{24}, S_2 et S_{12}, S_3 et S_8, S_4 et S_6, et le nombre de points qui déterminent cette courbe sera différent, selon qu'elle est le résultat de l'intersection de l'un ou de l'autre des quatre systèmes de couples.

3. Théorème III. *Une ligne de degré* mn *donnée par l'intersection des surfaces* S_m, S_n *est déterminée par un nombre de points donné par l'expression*

$$\frac{3mn(m-n+4)+(n-1)(n-2)(n-3)}{6}$$

où m *n'est pas inférieur à* n.

Démonstration. S_m et S_n sont données respectivement par des équations de degré m et n entre les coordonnées x, y, z. Soit

$$N=\frac{(m+1)(m+2)(m+3)-(m+1-n)(m+2-n)(m+3-n)-6}{6}.$$

Lorsque N groupes de valeurs simultanées de x, y, z satisfont aux deux équations, on en déduit une infinité d'autres groupes y satisfaisant également (théorème I); ce qui veut dire géométriquement : si les surfaces S_m, S_n ont N points en commun, elles ont encore une infinité d'autres points en commun et la ligne d'intersection est déterminée ; or l'expression N étant développée se réduit à la forme indiquée. Donc, etc.

Corollaire. Si $m = n$,

$$N = \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{6} - 2.$$

4. *Exemples.* 1°. $n = 1$, la courbe est plane et l'on obtient

$$N = \frac{m(m+3)}{2}.$$

2°. $n = 2$,

$$N = m(m+2).$$

3°. $n = 3$,

$$N = \frac{3m(m+1)}{2}.$$

5. Prenons d'abord les lignes dont le degré n'est pas un nombre premier.

Soient

$$\begin{array}{llll}
mn = 4, & n = 1, & m = 4, & N = 14, \\
 & n = 2, & m = 2, & N = 8; \\
mn = 6, & n = 1, & m = 6, & N = 27, \\
 & n = 2, & m = 3, & N = 15; \\
mn = 8, & n = 1, & m = 8, & N = 44, \\
 & n = 2, & m = 4, & N = 24; \\
mn = 10, & n = 1, & m = 10, & N = 65, \\
 & n = 2, & m = 5, & N = 35;
\end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
mn = 12, & n = 1, & m = 12, & N = 90,\\
 & n = 2, & m = 6, & N = 48,\\
 & n = 3, & m = 4, & N = 24;\\
mn = 16, & n = 1, & m = 16, & N = 152,\\
 & n = 2, & m = 8, & N = 80,\\
 & n = 4, & m = 4, & N = 42.
\end{array}$$

6. Lorsque le degré de la ligne est un nombre premier p, il est évident que, lorsque cette ligne est sur une surface de degré p, elle est nécessairement plane, car

$$mn = p,$$

on a nécessairement

$$m = p, \quad n = 1;$$

mais cette ligne devient gauche pour l'intersection de deux surfaces réglées ayant un élément rectiligne commun. Soit, par exemple, $p = 3$; l'intersection de deux surfaces réglées du second degré ayant une droite commune est une ligne gauche du troisième degré. Soit encore $p = 5$; l'intersection d'une surface réglée du second degré avec une surface réglée du troisième degré et ayant une droite en commun donne encore en commun une ligne gauche du cinquième degré.

7. Quand on dit qu'une ligne est déterminée par un certain nombre de points, il s'agit de points pris au hasard; mais lorsque ces points ont une certaine position, il peut y avoir indétermination. Par exemple, une courbe plane du troisième degré est déterminée par neuf points; mais lorsque ces points sont les intersections de deux de ces courbes, on peut y faire passer une infinité de lignes du troisième ordre: il en est de même pour les courbes gauches. Ainsi une ligne gauche du quatrième ordre est

déterminée par huit points. Mais lorsque ces huit points sont les intersections de trois surfaces du second ordre, il est évident qu'en prenant ces surfaces deux à deux, il passe trois courbes du quatrième ordre par ces huit points; de même pour les lignes de tout ordre.

8. Faisant

$$mn = p,$$

on a

$$6N = 3p\left(\frac{p}{n} - n + 4\right) + (n-1)(n-2)(n-3);$$

faisant croître n par unités, on obtient successivement

$$6N' = 3p\left(\frac{p}{n+1} - n + 3\right) + n(n-1)(n-2),$$

$$6N'' = 3p\left(\frac{p}{n+2} - n + 2\right) + (n+1)(n-1)(n-2),$$

. . . .

$$6(N - N') = 3p\left[\frac{p}{n(n+1)} + 1\right] - 3(n-1)(n-2);$$

or p est plus grand que $(n-1)(n-2)$; donc $N > N'$; on démontre de même que $N' > N''$, etc. Ainsi à mesure que n croît, les valeurs de N diminuent; plus n s'approche donc de m, plus le nombre de points déterminants diminue.

Par exemple, soit

$$p = 60;$$

on aura pour

	Points determinants.
1.60........	1890
2.30........	960
3.20........	660
4.15........	391
5.12........	214
6.10........	130

9. Toutes les courbes de degré mn, quoique déterminées par des nombres divers de points, ont en commun la propriété d'être rencontrées par un plan en mn points.

10. Théorème IV. *L'enveloppe des plans osculateurs d'une courbe à double courbure donnée par l'intersection de deux surfaces* S_m, S_n *est représentée par une équation de degré* $mn\,(m+n-2)$.

Démonstration. Cette enveloppe est le lieu des tangentes. Soient

$$F=0, \quad f=0$$

les équations rendues homogènes des surfaces de degrés respectifs m, n dont l'intersection donne les courbes, et x_1, y_1, z_1, u_1 les coordonnées d'un point de la courbe; soient encore

$$S=0$$

l'équation du plan tangent à la surface F et passant par le point $(x_1 y_1 z_1 u_1)$; et

$$s=0$$

l'équation du plan tangent à la surface f passant par le même point: alors

$$S=0, \quad s=0$$

seront les équations de la tangente à la courbe passant par ce même point; $F=0$, $f=0$ ne contiennent que les coordonnées fixes x_1, y_1, z_1, u_1 et aux degrés m et n; $S=0$, $s=0$ contiennent les mêmes coordonnées fixes aux degrés $m-1$, $n-1$ et encore les coordonnées constantes au premier degré x, y, z, u. Eliminant les coordonnées x_1, y_1, z_1, u_1 entre les quatre équations homogènes, en considérant x, y, z, u comme des coefficients d'après le théorème II, le degré de l'équation finale est

$$mn(m-1)(n-1)\left(\frac{1}{m-1}+\frac{1}{n-1}\right)=mn(m+n-2).$$

On n'a pas besoin d'avoir égard aux coefficients des équations

$$F=0, \quad f=0,$$

car ce sont des constantes.

11. Pour qu'on puisse mener d'un point donné une tangente à la courbe $F=0$, $f=0$, ou, ce qui revient au même, un plan tangent à la surface enveloppe, il faut que le point soit situé sur la surface enveloppe que nous venons de considérer. Le point étant donc pris sur cette surface, les coordonnées des points de contact qui satisfont à trois des quatre équations

$$F=0, \quad f=0, \quad S=0, \quad s=0$$

satisfont à la quatrième. Si donc m n'est pas inférieur à n, le plus grand nombre de points de contact sera donné par le système d'équations

$$F=0, \quad f=0, \quad S=0.$$

Ainsi $mn(m-1)$ est le nombre de tangentes qu'on peut mener par le point donné; c'est la *classe* de la courbe (S_m, S_n).

Observation. Cette expression a même lieu lorsque la courbe est plane; alors

$$n=1,$$

et $mn(m-1)$ devient $m(m-1)$.

12. *Définition.* L'enveloppe des plans normaux à la courbe se nomme *surface polaire de la courbe.*

THÉORÈME V. *Le degré de l'équation de la surface* *polaire relative à la courbe* (S_m, S_n) *est*

$$mn(3m + 3n - 4).$$

Démonstration. On trouve l'équation de cette surface en éliminant x_1, y_1, z_1, coordonnées du point de la courbe entre les quatre équations

$$F = 0, \quad f = 0,$$
$$(x - x_1)\,dx_1 + (y - y_1)\,dy_1 + (z - z_1)\,dz_1 = 0,$$
$$(x - x_1)\,d^2x_1 + (y - y_1)\,d^2y_1 + (z - z_1)\,d^2z_1 - ds'_z = 0\,(*).$$

La deuxième équation est de degré $m + n - 1$ et la troisième de degré $2m + 2n - 3$; donc, d'après le théorème II, les x, y, z montent au degré

$$mn(m + n - 1)(2m + 2n - 3)\left(\frac{1}{m + n - 1} + \frac{1}{2m + 2n - 1}\right)$$
$$= mn(3m + 3n) - 4.$$

13. Le plan passant par la tangente au point x_1, y_1, z_1 et par la perpendiculaire élevée en ce point au plan osculateur nommé axe du plan osculateur a pour équation

$$(\mathrm{A})\left\{\begin{aligned} &(x - x_1)[dy_1(dx_1\,d^2y_1 - dy_1\,d^2x_1) - dz_1(dy_1\,d^2z_1 - dz_1\,d^2y_1)] \\ + &(y - y_1)[dz_1(dy_1\,d^2z_1 - dz_1\,d^2y_1) - dx_1(dz_1\,d^2x_1 - dx_1 d^2z_1)] \\ + &(z - z_1)[dx_1(dz_1\,d^2x_1 - dx_1\,d^2z_1) - dy_1(dy_1\,d^2z_1 - dz_1 d^2y_1)] \end{aligned}\right\} = 0,$$

le degré en x_1, y_1, z_1 se monte à $3m + 3n - 5$.

L'enveloppe de ce plan a une équation de degré

$$3mn(2m + 2n - 3).$$

14. Le degré de la surface réglée formée par les normales principales est

$$2mn(2m + 2n - 3);$$

tel est aussi le degré de la surface réglée formée par les

(*) Duhamel, t. I^{er}, p. 398.

perpendiculaires au plan osculateur passant par le point x_1, y_1, z_1.

15. *Application.* $m = n = 2$.

Degré du plan osculateur. .	8
Plan normal.	32
Plan (A).	60
Normale principale.	40
Axes du plan osculateur. . .	40

16. La courbe formée par les centres de courbure est donnée par l'intersection des deux surfaces réglées formées par les plans osculateurs et les plans normaux, surfaces dont les degrés sont

$$mn(m+n-2) \quad \text{et} \quad mn(3m+3n-4).$$

Cette courbe n'est pas l'arête de rebroussement de la surface polaire ; cette arête est sur cette surface et sur celle que l'on obtient en éliminant x_1, y_1, z_1 entre les quatre équations

$$F = 0, \quad f = 0,$$
$$(x - x_1)\,dx_1 + (y - y_1)\,dy_1 + (z - z_1)\,dz_1 = 0,$$
$$(x - x_1)\,d^3x_1 + (y - y_1)\,d^3y_1 + (z - z_1)\,d^3z_1 = 0,$$

ce qui donne une surface de degré $mn(5m + 5n - 8)$.