

TERQUEM

**Sur l'évaluation d'une fonction algébrique fractionnaire, la variable étant racine d'une équation algébrique donnée ; d'après Gauss**

*Nouvelles annales de mathématiques 1<sup>re</sup> série*, tome 15 (1856), p. 315-321

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1856\\_1\\_15\\_\\_315\\_0](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1856_1_15__315_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1856, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**SUR L'ÉVALUATION D'UNE FONCTION ALGÈBRE FRACTIONNAIRE**

La variable étant racine d'une équation algébrique donnée ;

D'APRÈS GAUSS.

*Met. nova. integr. Comm. Gotting. vol. III, 1814-15, pages 39.*

I.

Soient  $Z$ ,  $\zeta$ ,  $\zeta'$  trois fonctions entières de  $z$ ; on demande quelle fonction entière on peut substituer à la fraction  $\frac{Z}{\zeta}$ , telle qu'en y substituant pour  $z$  une racine de l'équation  $\zeta' = 0$ , on trouve la même valeur qu'en substituant cette racine pour  $z$  dans l'expression fractionnaire  $\frac{Z}{\zeta}$ .

Soient  $k$  le degré de  $\zeta$  et  $k'$  le degré de  $\zeta'$ ; on suppose d'ailleurs que  $\zeta$  et  $\zeta'$  n'ont pas de facteur commun, de sorte que la fraction  $\frac{Z}{\zeta}$  ne peut devenir infinie: ce qui aurait lieu si l'on substituait une racine commune à  $\zeta$  et à  $\zeta'$ .

Faisons sur  $\zeta$  et  $\zeta'$  les opérations de la recherche du plus grand commun diviseur; on aura cette suite d'équations :

$$\begin{aligned}
 & \zeta'' = \lambda \zeta - p \zeta', \\
 & \zeta''' = \lambda' \zeta' - p' \zeta'', \\
 & \zeta^{iv} = \lambda'' \zeta'' - p'' \zeta''', \\
 & \zeta^v = \lambda''' \zeta''' - p''' \zeta^{iv}, \\
 & \dots\dots\dots \\
 & \zeta^{(m)} = \lambda^{(m-2)} \zeta^{(n-2)} - p^{(m-2)} \zeta^{(m-1)}.
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Les  $\zeta$  à partir de  $\zeta''$  sont les résidus des divisions, fonc-

tions entières dont le coefficient du premier terme est l'unité; et soient  $k'', k''', k^{iv}, \dots, k^{(m)}$  les degrés successifs de ces r sids. Ces nombres  $k, k', k'', \dots, k^{(m)}$  vont toujours en décroissant et enfin  $k^{(m)} = 0$ ;  $p, p', p'', \dots, p^{(m-1)}$  sont des fonctions entières de  $z$  de l'ordre  $k - k', k' - k'', k'' - k''', \dots$ ; les  $\lambda$  sont des nombres, et  $\zeta^{(m)} = 1$ ; car le dernier reste doit être l'unité puisque les fractions n'ont pas de diviseur commun: si  $k' > k$ , il faudra faire  $p = 0$ .

Formons une seconde série de fonctions entières de  $z$ , en changeant dans les équations (1) les  $\zeta$  en  $\eta$  et supposant  $\eta = 1, \eta' = 0$ ; on aura

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \eta'' = \lambda \eta - p \eta', \\ \eta''' = \lambda' \eta' - p' \eta'', \\ \eta^{iv} = \lambda'' \eta'' - p'' \eta''', \\ \eta^v = \lambda''' \eta''' - p^{iv} \eta^{iv}, \\ \dots\dots\dots \\ \eta^{(m)} = \lambda^{(m-2)} \eta^{(m-2)} - p^{(m-2)} \eta^{(m-1)}. \end{array} \right.$$

Il est évident que  $\eta'' = \lambda$ , par conséquent  $\eta''$  est d'ordre nul; que  $\eta''' = -p' \lambda$ , donc  $\eta'''$  est de même ordre que  $p'$ , c'est-à-dire de l'ordre  $k' - k''$ ;  $\eta^{iv}$  est de même ordre que  $p'' \eta'''$ , c'est-à-dire de l'ordre

$$k'' - k''' + k' - k'' = k' - k''.$$

On trouve de même que  $\eta^v$  est de l'ordre  $k' - k^{iv}$ , et ainsi de suite jusqu'à  $\eta^{(m)}$  qui est de l'ordre  $k' - k^{(m-1)}$ .

Considérons cette troisième série de fonctions

$$\zeta - \zeta \eta, \quad \zeta' - \zeta \eta', \quad \zeta'' - \zeta \eta'', \quad \zeta''' - \zeta \eta''', \dots$$

on a  videmment les relations

$$\begin{aligned} \zeta'' - \zeta \eta'' &= \lambda (\zeta - \zeta \eta) - p (\zeta' - \zeta \eta'), \\ \zeta''' - \zeta \eta''' &= \lambda' (\zeta - \zeta \eta') - p' (\zeta'' - \zeta \eta''), \\ \zeta^{iv} - \zeta \eta^{iv} &= \lambda'' (\zeta'' - \zeta \eta'') - p'' (\zeta''' - \zeta \eta'''). \end{aligned}$$

Il est évident que

$$\zeta - \zeta\eta = 0, \quad \zeta' - \zeta\eta' = \zeta',$$

donc  $\zeta'' - \zeta\eta''$  est divisible par  $\zeta'$ ; de même  $\zeta''' - \zeta\eta'''$ ,  $\zeta^{iv} - \zeta\eta^{iv}, \dots$ . Chacune de ces fonctions étant divisible par  $\zeta'$ , il s'ensuit que la racine de  $\zeta'$  substituée dans ces fonctions les annule; donc la dernière fonction

$$\zeta^{(m)} - \zeta\eta^{(m)} = 1 - \zeta\eta^{(m)}$$

devient nulle en remplaçant  $z$  par une racine de  $\zeta' = 0$ ; donc il en est de même de

$$\frac{Z}{\zeta} [1 - \zeta\eta^{(m)}] = \frac{Z}{\zeta} - Z\eta^m.$$

Ainsi la substitution de la valeur de  $z$  dans  $\frac{z}{\zeta}$  donne le même résultat que si on la substitue dans la fonction entière  $z\eta^{(m)}$ ; c'est ce qu'il fallait trouver.

## II.

Nous avons vu que  $Z\eta^{(m)}$  peut remplacer  $\frac{Z}{\zeta}$ ; mais il suffit de prendre le résidu de la division de  $Z\eta^{(m)}$  par  $\zeta'$ : à cet effet, posons les équations

$$\begin{aligned} Z &= q' \zeta' + Z', \\ Z' &= q'' \zeta'' + Z'', \\ Z'' &= q''' \zeta''' + Z''', \\ Z''' &= q^{iv} \zeta^{iv} + Z^{iv}, \\ &\dots\dots\dots \\ Z^{(m-1)} &= q^{(m)} \zeta^{(m)} + Z^{(m)}, \end{aligned}$$

où

- $Z'$  est le résidu de la division de  $Z$  par  $\zeta'$ ,
- $Z''$  " "  $Z'$  par  $\zeta''$ ,
- $Z'''$  " "  $Z''$  par  $\zeta'''$ ,
- etc.

Or  $Z'$  est d'un ordre inférieur à l'ordre de  $\zeta'$  inférieur à  $k'$ ,  $Z''$  est d'un ordre inférieur à celui de  $\zeta''$  inférieur à  $k''$ ; et allant de suite,  $Z^{(m)}$  est d'un ordre inférieur à  $\zeta^{(m)}$ , c'est-à-dire à 1. Donc

$$Z^{(m)} = 0;$$

ainsi

$$Z = q' \zeta' + q'' \zeta'' + q''' \zeta''' + q^{iv} \zeta^{iv} + \dots + q^{(m)} \zeta^{(m)}.$$

En posant

$$\zeta' = 0,$$

on a

$$\zeta'' = \zeta \eta'', \quad \zeta''' = \zeta \eta''', \quad \dots, \quad \zeta^{iv} = \zeta \eta^{iv}$$

(voir ci-dessus); donc, avec la même condition,

$$\zeta' = 0,$$

on a

$$\frac{Z}{\zeta} = q'' \eta'' + q''' \eta''' + q^{iv} \eta^{iv} + \dots + q^{(m)} \eta^{(m)}.$$

Or  $z'$  est d'un ordre inférieur à  $k'$ :  $q'' \zeta''$  est donc aussi d'un ordre inférieur à  $k'$ ; mais  $\zeta''$  est d'ordre  $k''$ :  $q''$  est donc d'un ordre inférieur à  $k' - k''$ ; mais  $\eta''$  est d'ordre nul: donc  $q'' \eta''$  est d'ordre inférieur à  $k'$ ,  $z''$  est d'ordre inférieur à  $k''$ , et de même  $q''' \zeta'''$ ; mais  $\zeta'''$  est d'ordre  $k'''$ : donc  $q'''$  est d'ordre inférieur à  $k'' - k'''$ ;  $\eta'''$  est d'ordre  $k' - k''$ : donc  $q''' \eta'''$  est d'ordre inférieur à  $k' - k''$ , et on démontre de même que tous les termes sont d'un ordre inférieur à  $k'$ .

Si l'équation

$$\zeta' = 0$$

a des racines rationnelles, il est plus facile de substituer immédiatement ces valeurs dans  $\frac{Z}{\zeta}$  et de débarrasser  $\zeta'$

de ces racines; le degré de la fonction équivalente sera *moindre* alors que si on laisse subsister ces racines rationnelles.

### III. Applications.

$$Z = z^6 - \frac{50}{39} z^4 + \frac{283}{715} z^2 - \frac{256}{15015},$$

$$\zeta = 7z^6 - \frac{105}{13} z^4 + \frac{315}{143} z^2 - \frac{35}{429},$$

$$\zeta' = z^4 - \frac{21}{13} z^2 + \frac{105}{143} z^2 - \frac{35}{429} z.$$

Posant

$$\zeta' = 0,$$

on a

$$z = 0$$

et

$$\frac{Z}{\zeta} = \frac{256}{1225}.$$

Divisant par  $z$ , on a

$$\zeta' = z^4 - \frac{21}{13} z^2 + \frac{105}{143} z^2 - \frac{35}{429},$$

$\frac{\zeta}{\zeta'}$  donne pour quotient 7 et pour résidu

$$\frac{42}{13} \left( z^4 - \frac{10}{11} z^2 + \frac{5}{33} \right);$$

donc

$$z^4 - \frac{10}{11} z^2 + \frac{5}{11} = \frac{13}{42} \zeta - \frac{13}{6} \zeta',$$

ainsi

$$\zeta'' = z^4 - \frac{10}{11} z^2 + \frac{5}{33},$$

$$\lambda = \frac{13}{42}, \quad \rho = + \frac{13}{6}.$$

et, continuant de même, on trouve

$$\zeta''' = z^2 - \frac{3}{7}, \quad \chi' = -\frac{4719}{280},$$

$$\zeta^{iv} = 1, \quad \gamma'' = -\frac{147}{8},$$

$$p' = -\frac{4719}{280} z^2 + \frac{3333}{286},$$

$$p'' = -\frac{147}{8} z^2 + \frac{777}{88},$$

$$\eta = 1, \quad \eta' = 0, \quad \eta'' = \frac{13}{4^2}, \quad \eta''' = \frac{20449}{3920} z^2 - \frac{14443}{3920},$$

$$\eta^{iv} = \frac{61347}{640} z^4 - \frac{127413}{1120} z^2 + \frac{120263}{4486};$$

$$Z = z^6 - \frac{50}{39} z^4 + \frac{283}{715} z^2 - \frac{256}{15015}, \quad q' = 1,$$

$$Z' = \frac{1}{3} z^5 - \frac{22}{65} z^3 + \frac{323}{5005}, \quad q'' = \frac{1}{3},$$

$$Z'' = -\frac{76}{2145} z^4 + \frac{632}{45045}, \quad q''' = -\frac{76}{2145},$$

$$Z''' = -\frac{4}{3465}, \quad q^{iv} = -\frac{4}{3405};$$

de là, on dérive la fonction entière équivalente à la fonction fractionnaire, savoir :

$$-\frac{1859}{16800} z^4 - \frac{1573}{29400} z^2 + \frac{7947}{39200}.$$

M. Koralek, le célèbre calculateur, a ainsi achevé le calcul; regardant  $z^2$  comme l'inconnue, les trois racines de l'équation

$$z^6 - \frac{21}{13} z^4 + \frac{105}{143} z^2 - \frac{35}{459} = 0$$

sont

$$z_1^2 = 0,549\ 664\ 41,$$

$$z_2^2 = 0,900\ 912\ 54,$$

$$z_3^2 = 0,164\ 807\ 68;$$

ces valeurs, étant substituées dans l'expression

$$\frac{1859}{1680} z^4 - \frac{1573}{29400} z^2 + \frac{7947}{39200},$$

donnent respectivement ces résultats :

$$- 0,042\ 568\ 17,$$

$$- 0,011\ 774\ 11,$$

$$- 0,008\ 449\ 63.$$

*Note.* On voit qu'il est bien moins pénible de calculer sur une fonction entière que sur une fraction rompue. Soient P, Q, R trois fonctions entières de  $z$  et supposons que l'on ait

$$P\gamma + Q = 0, \quad R = 0;$$

éliminant  $z$ , on obtient une équation en  $\gamma$ . Cette méthode nous apprend qu'on peut parvenir à cette équation en  $\gamma$  en éliminant  $z$  entre  $\gamma = S$  et  $R = 0$ , S étant une fonction entière de  $z$  qu'on peut déterminer. Cela revient géométriquement à remplacer une courbe hyperbolique par une courbe parabolique.

Tm.