NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. DE JONQUIÈRES

Théorème concernant quatre coniques inscrites dans le même quadrilatère

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 15 (1856), p. 312-314

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1856_1_15__312_1>

THEORÈME CONCERNANT QUATRE CONIQUES INSCRITES DANS LE MÊME QUADRILATÈRE;

PAR M. E. DE JONQUIÈRES.

1. THÉORÈME. *Soient* C, C′, Σ, Σ′ *quatre coniques inscrites dans un même quadrilatère;* m, m′ *deux des points d'intersection de* Σ *avec* C *et* C′ *respectivement et* n *l'un des points d'intersection de* Σ′ *avec* C. *Si l'on décrit la conique* U *qui est tangente aux quatre côtés du quadrilatère et à la corde* m′ n, *et qu'on fasse rouler cette corde sur la conique* U *jusqu'à ce qu'elle passe par le point* m, *ce qui donne lieu à deux positions distinctes, cette corde, dans chacune de ces deux positions, passera par l'un des points d'intersection de* Σ′ *et de* C′.

2. Pour démontrer ce théorème, je remarque d'abord que si l'on transforme, par voie de *dualité*, la proposition qui fait l'objet du n° 757 de la *Géométrie supérieure*, on obtient la suivante qui en est la *corrélative:*

Étant données trois coniques inscrites dans le même quadrilatère, si une corde de longueur variable roule sur l'une d'elles, tandis que ses extrémités glissent sur les deux autres respectivement, les tangentes à la pre-

mière conique, menées par ces deux extrémités, se coupent sur une quatrième conique inscrite dans le même quadrilatère que les trois autres.

3. Cela posé, soit désignée par M la tangente $m'n$ à la conique U, et soit N une tangente à la même conique menée par le point m. N coupera la conique Σ' en deux points n', n''. Ne nous occupons que de celui de ces deux points qui est situé dans la région de la conique Σ' où serait naturellement amenée l'extrémité n de la corde variable $m'n$, quand on la fait rouler sur U et glisser en même temps sur Σ et Σ' jusqu'à ce qu'elle vienne passer par le point m, conformément à l'hypothèse; et soit n' ce point.

La droite M a ses extrémités m', n situées sur Σ et Σ' respectivement, et la droite N a ses extrémités m et n' sur ces deux mêmes coniques respectivement. Ces deux droites sont tangentes à la conique U; donc, en vertu de la proposition auxiliaire rappelée ci-dessus (n° 2), le point de concours i des tangentes à cette conique menées par les deux points m' et n, et le point de concours i' des deux tangentes à la même conique menées par les deux points m et n', sont sur une sixième conique U′ inscrite dans le même quadrilatère que les coniques données.

Actuellement, considérons les droites mi' et ni; elles sont, par construction, tangentes toutes deux à la conique U. Les extrémités de la première sont les points m et i' situés respectivement sur C et U′; celle de la seconde sont les points n et i situés respectivement aussi sur les deux mêmes coniques C et U′. Donc, en vertu de la proposition déjà citée, les tangentes à U, menées par leurs extrémités, doivent se couper deux à deux sur une même conique inscrite dans le même quadrilatère que les coniques données. Ces tangentes sont, d'une part, mn' et $i'n'$

qui se coupent en n', et, d'autre part, nm' et im' qui se coupent en m'. Or m' appartient, par hypothèse, à la conique C'; donc enfin n' appartient aussi à cette conique.

C. Q. F. D.

4. Le quadrilatère du théorème général (n° 1) peut être un parallélogramme. Si ce parallélogramme devient imaginaire, les deux sommets, considérés comme deux *centres d'homologie,* subsistent et conservent toutes leurs propriétés. Dans ce cas, ils sont les foyers communs des coniques données (voir *Traité des propriétés projectives*). La proposition (n° 2) et le théorème général (n° 1) subsistent également. Seulement il faut ajouter que si deux des coniques, C et C' par exemple, sont de même espèce (ellipses ou hyperboles), les deux autres Σ, Σ' sont nécessairement d'espèce différente des premières (hyperboles ou ellipses), sans quoi les points d'intersection m, m', n, n' seraient imaginaires.

5. Les points m, m' seront alors désignés sous le nom de *points correspondants,* et de même les points n et n'.

Le théorème général prend ainsi l'énoncé suivant, qui a été donné pour la première fois sans démonstration par M. Chasles, dans une communication faite à l'Académie des Sciences le 1er juin 1846 au sujet des coniques homofocales:

Si l'on prend sur deux coniques deux systèmes de points correspondants m, m′ *et* n, n′, *les deux droites* mn′, m′n *sont tangentes à une même conique homofocale aux proposées.*