NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

LÉON DURAND

Solution de la question 316

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 15 (1856), p. 296-297

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1856_1_15__296_0>

SOLUTION DE LA QUESTION 316

(voir page 52);

PAR M. LÉON DURAND,
Élève au petit seminaire d'Iseure.

Toute progression arithmétique où la raison et le premier terme sont premiers entre eux, renferme un nombre infini de termes premiers à un nombre donné quelconque.

(JACOBI.)

Démonstration.

$$k = a + xr$$

est un terme de cette progression dont le premier terme est a et la raison r.

Soit α le produit des facteurs communs à a et au nombre donné p;

Soit p' le produit des facteurs premiers de p qui ne divisent point a.

Si 6 représente un nombre premier avec α et plus petit que lui, $(n\alpha + 6)$ sera premier avec α.

Si donc on fait

$$x = (n\alpha + 6)p',$$

alors

$$k = a + (n\alpha + 6)p'r,$$

et k sera premier avec p; car un facteur premier ϖ commun à p et à k, ou bien divisant α, diviserait a, mais non $(n\alpha + 6)p'r$, ou bien, divisant p', diviserait $(n\alpha + 6)p'r$, mais non a.

Or n est un nombre quelconque, j'en conclus pour k une infinité de valeurs.

Note. M. Dirichlet a démontré que toute progression arithmétique dont le premier terme et la raison sont premiers entre eux renferme une infinité de nombres premiers. Si l'on admet que toute progression arithmétique dont le premier terme et la raison sont premiers entre eux renferme au moins un nombre premier, le théorème de M. Dirichlet découle immédiatement du théorème de Jacobi. Il suffit de prendre pour p le produit de tous les nombres premiers renfermés dans la progression $a + xr$ et de considérer la progression

$$(\alpha + 6 p' r) + n(\alpha p' r);$$

on conclurait que les termes de cette dernière progression n'ont aucun diviseur premier de la forme $a + xr$, et qu'en conséquence cette progression ne renferme aucun nombre premier, contrairement au principe admis. Il n'existe donc aucun nombre p qui soit le produit de tous les nombres premiers renfermés dans la formule $a + xr$; ces nombres premiers sont donc en nombre illimité.

(PEPIN S. J.)