Nouvelles annales de mathématiques

François Brioschi

Sur les séries qui donnent le nombre de racines réelles des équations algébriques à une ou à plusieurs inconnues

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 15 (1856), p. 264-286

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1856_1_15__264_1>

SUR LES SÉRIES QUI DONNENT LE NOMBRE DE RACINES RÉELLES des équations algébriques à une ou à plusieurs inconnues;

PAR M. FRANÇOIS BRIOSCHI,
Professeur à l'université de Pavie.

I.

Quelques propriétés des formes quadratiques (*).

1°. Soit

$$f = \sum_r \sum_s \mathrm{A}_{r,s} u_r u_s \qquad (\mathrm{A}_{r,s} = \mathrm{A}_{s,r})$$

(*) Nous engageons le lecteur à ne prendre qu'une forme quadratique à trois variables u_1, u_2, u_3 et il verra que dans cet admirable Mémoire tout devient d'une facilité intuitive. TM.

une forme quadratique à n indéterminées $u_1, u_2, \ldots, u_n$; si on la transforme au moyen de la substitution linéaire

(1) $$u_r = a_{r,1} v_1 + a_{r,2} v_2 + \ldots + a_{r,n} v_n$$

en posant

(2) $$A_{1,s} a_{1,r} + A_{2,s} a_{2,r} + \ldots + A_{n,s} a_{n,r} = h_{s,r},$$

et en supposant

(3) $$\left\{\begin{array}{l} h_{1,r} a_{1,s} + h_{2,r} a_{2,s} + \ldots + h_{n,r} a_{n,s} = 0, \\ h_{1,r} a_{1,r} + h_{2,r} a_{2,r} + \ldots + h_{n,r} a_{n,r} = p_r, \end{array}\right.$$

on aura

(4) $$f = \sum_r p_r v_r^2 .$$

où les rectangles ont disparu. La substitution linéaire

(5) $$u_r = c_{r,1} w_1 + c_{r,2} w_2 + \ldots + c_{r,n} w_n$$

transformera d'une manière semblable la forme f dans celle-ci

(6) $$f = \sum_r q_r w_r^2,$$

en faisant

$$A_{1,s} c_{1,r} + A_{2,s} c_{2,r} + \ldots + A_{n,s} c_{n,r} = k_{s,r},$$
$$k_{1,r} c_{1,s} + k_{2,r} c_{2,s} + \ldots + k_{n,r} c_{n,s} = 0,$$
$$k_{1,r} c_{1,r} + k_{2,r} c_{2,r} + \ldots + k_{n,r} c_{n,r} = q_r.$$

Si l'on indique par A et C les déterminants (*)

$$\sum (\pm a_{1,1} a_{2,2} \ldots a_{n,n}), \quad \sum (\pm c_{1,1} c_{2,2} \ldots c_{n,n}),$$

et par $\alpha_{r,s}$, $\gamma_{r,s}$ les expressions $\dfrac{dA}{da_{r,s}}$, $\dfrac{dC}{dc_{r,s}}$; les équa-

(*) Il est à regretter, dans l'intérêt de l'enseignement public, que la traduction de l'ouvrage fondamental sur les déterminants de M. Brioschi tarde si longtemps à paraître. Il y a urgence. TM.

tions (1) donnent réciproquement v en u

$$A v_r = \alpha_{1,r} u_1 + \alpha_{2,r} u_2 + \ldots + \alpha_{n,r} u_n,$$

et en substituant pour u_1, u_2,..., u_n les valeurs (5), on aura

$$(7) \qquad A v_r = \lambda_{r,1} w_1 + \lambda_{r,2} w_2 + \ldots + \lambda_{r,n} w_n,$$

où

$$\lambda_{s,r} = \alpha_{1,s} c_{1,r} + \alpha_{2,s} c_{2,r} + \ldots + \alpha_{n,s} c_{n,r}.$$

Si, au moyen de la substitution linéaire (7), on transforme l'équation (4), la comparaison de ce résultat avec la forme (6) donne les équations

$$(8) \qquad \left\{ \begin{aligned} p_1 \lambda_{1,r}^2 + p_2 \lambda_{2,r}^2 + \ldots + p_n \lambda_{n,r}^2 &= q_r A^2, \\ p_1 \lambda_{1,r} \lambda_{1,s} + p_2 \lambda_{2,r} \lambda_{2,s} + \ldots + p_n \lambda_{n,r} \lambda_{n,s} &= 0. \end{aligned} \right.$$

De même, en posant

$$\mu_{r,s} = \gamma_{1,2} a_{1,s} + \gamma_{r,r} a_{2,s} + \ldots + \gamma_{n,r} a_{n,s},$$

on obtient les équations

$$(9) \qquad \left\{ \begin{aligned} q_1 \mu_{1,r}^2 + q_2 \mu_{2,r}^2 + \ldots + q_n \mu_{n,r}^2 &= p_r C^2, \\ q_1 \mu_{1,r} \mu_{1,s} + q_2 \mu_{2,r} \mu_{2,s} + \ldots + q_n \mu_{n,r} \mu_{n,s} &= 0. \end{aligned} \right.$$

2°. Soient α_1, α_2,..., α_r, r indéterminées; je désigne par L le déterminant

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \lambda_{1,1} & \lambda_{2,1} \ldots & \lambda_{r-1,1} \\ \alpha_2 & \lambda_{1,2} & \lambda_{2,2} \ldots & \lambda_{r-1,2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_r & \lambda_{1,r} & \lambda_{2,r} \ldots & \lambda_{r-1,r} \end{vmatrix}$$

et par L_s l'expression

$$\lambda_{s,1} \frac{dL}{d\alpha_1} + \lambda_{s,2} \frac{dL}{d\alpha_2} + \ldots + \lambda_{s,r} \frac{dL}{d\alpha_r}.$$

Si, dans les équations (8), on fait

$$r = 1, \quad s = 2,\ 3, \ldots, r$$

on obtient r équations, lesquelles multipliées respectivement par

$$\frac{dL}{d\alpha_1}, \quad \frac{dL}{d\alpha_2}, \ldots, \quad \frac{dL}{d\alpha_r}$$

donnent

$$p_r \lambda_{r,1} L_r + p_{r+1} \lambda_{r+1,1} L_{r+1} + \ldots + p_n \lambda_{n,1} L_n = q_1 \frac{dL}{d\alpha_1} A^2.$$

Des mêmes équations (8) on déduira d'une manière analogue les suivantes :

$$p_r \lambda_{r,2} L_r + p_{r+1} \lambda_{r+1,2} L_{r+1} + \ldots + p_n \lambda_{n,2} L_n = q_2 \frac{dL}{d\alpha_2} A^2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$p_r \lambda_{r,r} L_r + p_{r+1} \lambda_{r+1,r} L_{r+1} + \ldots + p_n \lambda_{n,r} L_n = q_r \frac{dL}{d\alpha_r} A^2,$$

et en ajoutant ces équations multipliées respectivement par

$$\frac{dL}{d\alpha_1}, \quad \frac{dL}{d\alpha_2}, \ldots, \quad \frac{dL}{d\alpha_r},$$

on a

$$(10)\left\{\begin{aligned} & p_r L_r^2 + p_{r+1} L_{r+1}^2 + \ldots + p_n L_n^2 \\ & = A^2 \left\{ q_1 \left(\frac{dL}{d\alpha_1}\right)^2 + q_2 \left(\frac{dL}{d\alpha_2}\right)^2 + \ldots + q_r \left(\frac{dL}{d\alpha_r}\right)^2 \right\}. \end{aligned}\right.$$

En désignant par M le déterminant

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \mu_{1,1} & \mu_{2,1} \ldots & \mu_{r-2,1} \\ \alpha_2 & \mu_{1,2} & \mu_{2,2} \ldots & \mu_{r-2,2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{r-1} & \mu_{1,r-1} & \mu_{2,r-1} \ldots & \mu_{r-2,r-1} \end{vmatrix}.$$

et par M_s l'expression

$$\mu_{s,1}\frac{dM}{d\alpha_1}+\mu_{s,2}\frac{dM}{d\alpha^2}+\ldots+\mu_{s,r-1}\frac{dM}{d\alpha_{r-1}},$$

on déduit d'une manière analogue des équations (9) l'équation

$$(11)\left\{\begin{aligned} & q_{r-1}M_{r-1}^2+q_rM_r^2+\ldots+q_nM_n^2 \\ & =C^2\left\{p_1\left(\frac{dM}{d\alpha_1}\right)^2+p_2\left(\frac{dM}{d\alpha_2}\right)^2+\ldots+p_{r-1}\left(\frac{dM}{d\alpha_{r-1}}\right)^2\right\}.\end{aligned}\right.$$

3°. Supposons que les coefficients $a_{r,s}$, $c_{r,s}$ et les α soient des quantités réelles, la même propriété aura lieu pour L_s, M_s, $\frac{dL}{d\alpha_s}$, $\frac{dM}{d\alpha_s}$; par conséquent les signes des termes des équations (10), (11) ne dépendront que des signes des coefficients p_1, p_2,..., q_1, q_2,.... Je suppose p_1, p_2,..., p_{r-1} tous négatifs, et les autres coefficients p_r, p_{r+1},..., p_n tous positifs. L'équation (10) montre que les r coefficients q_1, q_2,..., q_r ne peuvent pas être tous négatifs; et parce que ces coefficients sont r quelconques entre les n coefficients q_1, q_2,..., q_n, on en déduit que de ces mêmes coefficients il ne peut en être de négatifs un nombre plus grand que $r-1$. Or l'équation (11) montre que les coefficients q_{r-1}, q_r,..., q_n ne doivent pas être tous positifs, puisque p_1, p_2,..., p_{r-1} sont négatifs; mais ces coefficients sont $n-r+2$ quelconques entre les n quantités q_1, q_2,..., q_n; donc le nombre des positifs entre ces coefficients ne doit pas être plus grand que $n-r+1$; ou bien le nombre des négatifs ne devra être plus petit que $r-1$. Ainsi le nombre des quantités négatives parmi q_1, q_2,..., q_n ne peut être ni supérieur ni inférieur à $r-1$, donc il est égal à $r-1$; c'est-à-dire égal au nombre des négatifs entre les n coefficients p_1, p_2,..., p_n. En conséquence on a le théorème suivant :

THÉORÈME I. *Si l'on transforme une forme quadratique au moyen d'une substitution linéaire à coefficients réels, dans une autre qui contienne les seuls carrés des variables, le nombre des termes positifs et négatifs de la transformée sera constant, quelle que soit la substitution employée.*

Cette importante propriété des formes quadratiques a été énoncée par M. Sylvester sous la dénomination de *loi d'inertie* des formes quadratiques. La démonstration ci-dessus en fait voir toute la généralité (*).

4°. On sait, ou l'on peut démontrer facilement, que, posant

$$m_{r,s} = \begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{2,1} \ldots & A_{r,1} \\ A_{1,2} & A_{2,2} \ldots & A_{r,2} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1,r-1} & A_{2,r-1} \ldots & A_{r,r-1} \\ A_{1,s} & A_{2,s} & A_{r,s} \end{vmatrix}$$

et

$$m_{r,r} = \Delta_r, \quad \Delta_0 = 1, \quad \Delta_1 = A_{1,1}, \quad \Delta_2 = A_{1,1}A_{2,2} - A_{1,2}^2, \ldots,$$

$$m_{r,s} = \frac{d.\Delta_r}{d.A_{r,s}},$$

on transforme la forme quadratique f dans celle-ci

$$f = \sum_r \frac{\Delta_r}{\Delta_{r-1}} v_r^2,$$

au moyen de la substitution linéaire

$$\begin{aligned} m_{1,1}v_1 &= m_{1,1}u_1 + m_{1,2}u_2 + \ldots + m_{1,n}u_n, \\ m_{2,2}v_2 &= \phantom{m_{1,1}u_1 +{}} m_{2,2}u_2 + \ldots + m_{2,n}u_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ m_{n,n}v_n &= \phantom{m_{1,1}u_1 + m_{1,2}u_2 + \ldots +{}} m_{n,n}u_n, \end{aligned}$$

et les u étant exprimés en fonction de v.

(*) Ainsi, en faisant disparaître les rectangles dans une équation d'une conique ou d'une surface du second degré, les nombres des termes positifs et négatifs restent constants, quelle que soit la transformation linéaire.

TM.

Supposons maintenant que les coefficients $A_{r,s}$ de la forme f soient réels; alors on déduira comme corollaire du théorème I que le nombre des termes positifs et négatifs dans une transformée quelconque de la forme f (laquelle contienne les seuls carrés des variables, et soit obtenue au moyen d'une substitution linéaire à coefficients réels) est égal au nombre des termes positifs et négatifs dans la série :

$$\frac{\Delta_1}{\Delta_0}, \quad \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \ldots, \quad \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}},$$

c'est-à-dire au nombre des permanences et des variations de signe dans la série

$$(12) \qquad \Delta_0, \ \Delta_1, \ \Delta_2, \ldots, \ \Delta_n;$$

or

$$\Delta_0 = 1.$$

Ainsi l'on a ce théorème :

THÉORÈME II. *Le nombre des permanences et des variations de signes dans la suite* (12) *est égal au nombre des termes positifs et négatifs dans une transformée quelconque de la forme* f *obtenue dans les conditions du théorème I.*

5°. Une autre transformation remarquable de la forme quadratique f est celle qu'on obtient au moyen d'une substitution orthogonale, c'est-à-dire d'une substitution linéaire

$$u_r = a_{r,1} v_1 + a_{r,2} v_2 + \ldots + a_{r,n} v_n,$$

où les coefficients doivent vérifier les équations

$$a_{r,1}^2 + a_{r,2}^2 + \ldots + a_{r,n}^2 = 1,$$

$$a_{r,1} a_{s,1} + a_{r,2} a_{s,2} + \ldots + a_{r,n} a_{s,n} = 0.$$

De ces équations on déduit

$$\mathrm{A} = 1, \quad a_{s,r} = \alpha_{s,r} \text{ (\textit{voir} p. 265)};$$

mais les équations (3) nous donnent en général

$$\mathrm{A}\, h_{s,r} = p_r\, \alpha_{s,r},$$

par conséquent, dans ce cas particulier, l'équation (2) donnera

$$\mathrm{A}_{1,s}\, a_{1,r} + \ldots + (\mathrm{A}_{s,s} - p_r)\, a_{s,r} + \ldots + \mathrm{A}_{n,s}\, a_{n,r} = 0$$

Les coefficients p_1, p_2, etc., de la transformée

$$f = \sum_r p_r v_r^2$$

seront donc, comme il est connu, les racines du $n^{\text{ième}}$ degré

$$(13) \qquad \begin{vmatrix} \mathrm{A}_{1,1} - \theta & \mathrm{A}_{2,1} \ldots & \mathrm{A}_{n,1} \\ \mathrm{A}_{1,2} & \mathrm{A}_{2,2} - \theta \ldots & \mathrm{A}_{n,2} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathrm{A}_{1,n} & \mathrm{A}_{2,n} \ldots & \mathrm{A}_{n,n} - \theta \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$\theta^n - \mathrm{A}_1 \theta^{n-1} + \mathrm{A}_2 \theta^{n-2} - \ldots$$
$$+ (-1)^{n-1} \mathrm{A}_{n-1}\, \theta + (-1)^n \mathrm{A}_n = 0;$$

$\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_n$ sont des fonctions de $\mathrm{A}_{1,1}$, $\mathrm{A}_{1,2}$, etc.

Or les racines de ces équations sont toutes réelles (propriété démontrée par MM. Cauchy, Jacobi, Borchardt, Sylvester, etc.; en conséquence le nombre des coefficients positifs dans la transformée ci-dessus sera égal au nombre des permanences de signes dans la suite

$$(14) \qquad 1,\ \mathrm{A}_1,\ \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_n,$$

et le nombre des coefficients négatifs sera égal au nombre des variations de signes dans la même suite.

Les deux séries (12), (14) donneront donc pour le théorème I un même nombre de permanences et de variations de signes.

II.

Des équations algébriques à une seule inconnue.

1°. Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les racines d'une équation

$$\varphi(x) = 0,$$

$\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_n(x)$, n fonctions rationnelles entières de x; $\omega(x)$, $\theta(x)$ deux polynômes qui ont même signe pour toutes les racines réelles de l'équation et a un nombre entier impair positif ou négatif.

Je démontrerai en premier lieu que la forme quadratique en u

$$f = \sum_m (x - x_m)^a \frac{\omega(x_m)}{\theta(x_m)} \left\{ u_1 \psi_1(x_m) + u_2 \psi_2(x_m) + \ldots + u_n \psi_n(x_m) \right\}^2,$$

ou en posant

$$\sum_m (x - x_m)^a \frac{\omega(x_m)}{\theta(x_m)} \psi_r(x_m) \psi_s(x_m) = \mathrm{A}_{r,s},$$

la forme quadratique

$$f = \sum_r \sum_s \mathrm{A}_{r,s} u_r u_s$$

est à coefficients réels. En effet, supposons que les racines x_1, x_2 soient imaginaires conjuguées. En posant

$$(x - x_1)^a \omega(x_1) \psi_r(x_1) \psi_s(x_1) = \alpha + i\beta,$$
$$\theta(x_1) = l + im,$$

on aura

$$(x - x_2)^a \omega(x_2) \psi_r(x_2) \psi_s(x_2) = \alpha - i\beta,$$
$$\theta(x_2) = l - im, \quad (i = \sqrt{-1}),$$

et

$$A_{r,s} = \frac{2}{l^2 + m^2}(l\alpha + m\beta)$$

$$+ \sum_{3}^{n}{}_m (x - x_m)^a \frac{\omega(x_m)}{\theta(x_m)} \psi_r(x_m)\psi_s(x_m);$$

par conséquent, les coefficients de la forme f seront réels pour toutes les valeurs des racines $x_1, x_2, \ldots, x_n$, et on pourra donc appliquer à cette forme le théorème II.

2°. Cela posé, j'observe que, en supposant les racines x_1, x_2 imaginaires conjuguées et en posant

$$(x - x_1)^a \omega(x_1) = \lambda + i\mu, \quad \theta(x_1) = l + im,$$

$$u_1\psi_1(x_1) + u_2\psi_2(x_1) + \ldots + u_n\psi_n(x_1) = P + iQ,$$

on aura

$$(x - x_2)^a \omega(x^2) = \lambda - i\mu, \quad \theta(x_2) = l - im,$$

$$u_1\psi_1(x_2) + u_2\psi_2(x_2) + \ldots + u_n\psi_n(x_2) = P - iQ,$$

P, Q étant les fonctions linéaires de $u_1, u_2, \ldots, u_n$. En substituant ces valeurs dans f, on obtient

$$f = \frac{2}{\alpha(l^2 + m^2)}\left\{(\alpha P + \beta Q)^2 - (\alpha^2 + \beta^2)Q^2\right\}$$

$$+ \sum_{3}^{n}{}_m (x - x_m)^a \frac{\omega(x_m)}{\theta(x_m)}\left\{u_1\psi_1(x_m) + \ldots + u_n\psi_n(x_m)\right\}^2,$$

où

$$l\lambda + m\mu = \alpha, \quad m\lambda - l\mu = \beta;$$

et en général supposant que $x_1, x_{r+1}; x_2, x_{r+2}; \ldots, x_r, x_{2r}$ soient r couples de racines imaginaires et que

$$x_{2r+1} \ldots x_n$$

soient réelles, on pourra mettre f sous la forme

$$f = 2\sum_{1}^{r}{}_s \frac{1}{\alpha_s(l_s^2+m_s^2)} \left\{ (\alpha_s P_s + \beta_s Q_s)^2 - (\alpha_s^2+\beta_s^2) Q_s^2 \right\}$$

$$+ \sum_{2r+1}^{n}{}_m (x - x_m)^a \frac{\omega(x_m)}{\theta(x_m)} \left\{ u_1 \psi_1(x_m) + \ldots + u_n \psi_n(x_m) \right\}^2.$$

En transformant cette forme quadratique au moyen de la substitution linéaire à coefficients réels

$$v_s = \alpha_s P_s + \beta_s Q_s, \quad v_{2s} = Q_s,$$

$$v_m = u_1 \psi_1(x_m) + u_2 \psi_2(x_m) + \ldots + u_n \psi_n(x_m),$$

$(s = 1, 2, \ldots, r,\ m = 2r+1, \ldots, n)$; on obtient

$$(15)\quad \left\{ \begin{aligned} f &= 2\sum_{1}^{r}{}_s \frac{1}{\alpha_s(l_s^2+m_s^2)} \left\{ v_s^2 - (\alpha_s^2+\beta_s^2) v_{2s}^2 \right) \\ &+ \sum_{2r+1}^{n}{}_m (x - x_m)^a \frac{\omega(x_m)}{\theta(x_m)} v_m^2, \end{aligned} \right.$$

et le nombre des termes positifs et négatifs dans cette transformée sera par les deux théorèmes de la première partie égal au nombre des permanences et des variations de signe dans la suite (12), et réciproquement. Cela aura lieu pour une valeur quelconque réelle de la variable x. Les Δ sont des fonctions de $A_{r,s}$, et, par conséquent, maintenant des fonctions de x.

Or pour une valeur réelle déterminée h de x, le nombre des termes positifs de la transformée (15) est évidemment égal à r (nombre des couples des racines imaginaires) plus le nombre des racines réelles $x_{2r+1}, \ldots, x_n$ qui ont des valeurs inférieures à h ; et le nombre des termes négatifs dans la même transformée est évidemment égal à r, plus le nombre des racines réelles qui ont des valeurs plus grandes que h. De cette manière on est conduit au théorème suivant :

THÉORÈME III. *Pour une valeur réelle* h *de* x, *le nombre des permanences de signes dans la suite*

$$1, \Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n,$$

représente le nombre des couples de racines imaginaires de l'équation

$$\varphi(x) = 0,$$

augmenté du nombre des racines réelles moindres que h. *Le nombre des variations représente le nombre des couples de racines imaginaires, plus le nombre des racines réelles supérieures à* h.

Dans ce théorème sont compris deux théorèmes analogues de M. Sylvester et de M. Hermite.

Corollaire I. Si dans la suite (12) ci-dessus on pose successivement

$$x = h, \quad x = k, \quad (h > k),$$

la différence entre les nombres des variations correspondantes sera égale au nombre des racines réelles de l'équation

$$\varphi(x) = 0,$$

comprises entre k et h.

Corollaire II. L'équation

$$\varphi(x) = 0$$

a autant de couples de racines imaginaires qu'il y a de variations de signes dans la série des coefficients des plus hautes puissances de la variable dans la suite supérieure. En se rappelant ce qu'on a démontré dans la première

18.

partie, n° 5, on voit facilement que les propriétes établies dans le théorème précédent et dans ses corollaires ont lieu aussi pour la suite

$$1,\ A_1,\ A_2,\ldots,\ A_n,$$

qui est une suite de fonctions de x. (*Comptes rendus,* 25 juin 1855, *Sur le dénombrement des racines, etc.*, par M. Cauchy.)

On voit donc qu'il existe une infinité de fonctions possédant les propriétés de celles de M. Sturm et qu'il y a des moyens assez simples pour les obtenir.

3°. Nous croyons utile d'ajouter quelques applications.

a. Supposons

$$\psi_r(x) = x^{r-1},\quad \theta(x) = \varphi'(x),\quad a = +1,$$

on a

$$A_{r,s} = \sum_m (x - x_m)\frac{\omega(x_m)}{\varphi'(x_m)}\, x_m^{r+s-2},$$

ou en posant

$$S_t = \sum_m \frac{x_m^t\,\omega(x_m)}{\psi'(x_m)},$$

on obtient

$$A_{r,s} = S_{r+s-2}\,x - S_{r+s-1}$$

et

$$\Delta_r = \begin{vmatrix} S_0 x - S_1 & S_1 x - S_2 \ldots & S_{r-1} x - S_r \\ S_1 x - S_2 & S_2 x - S_3 \ldots & S_r x - S_{r+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ S_{r+1} x - S_r & S_r x - S_{r+1} \ldots & S_{2r-2} x - S_{2r-1} \end{vmatrix}$$

ou, par une transformation connue,

$$\Delta_r = \begin{vmatrix} S_0 & S_1 \ldots & S_r \\ S_1 & S_2 \ldots & S_{r-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ S_{r-1} & S_r \ldots & S_{2r-1} \\ 1 & x & x^r \end{vmatrix}$$

Ces fonctions Δ_r sont, à un facteur constant près, les dénominateurs des réduites qu'on obtient en développant en fraction continue la fraction $\frac{\omega(x)}{\varphi(x)}$, en supposant $\omega(x)$. de degré inférieur à n. J'ai démontré directement cette propriété dans une Note : *Intorno ad alcuni punti d'algebra superiore*, publiée dans les *Annales* de M. Tortolini, août 1854; ce que d'ailleurs on peut vérifier assez facilement *à posteriori*.

Si l'on suppose $a = -1$ et

$$\mathrm{I}_i = \sum_m \frac{x_m^i\,\omega(x_m)}{(x - x_m)\,\varphi'(x_m)},$$

on a

$$\Delta_r = \begin{vmatrix} \mathrm{I}_0 & \mathrm{I}_1 \ldots & \mathrm{I}_{r-1} \\ \mathrm{I}_1 & \mathrm{I}_2 \ldots & \mathrm{I}_r \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathrm{I}_{r-1} & \mathrm{I}_r \ldots & \mathrm{I}_{2r-2} \end{vmatrix}$$

et ces fonctions Δ_r sont, à un facteur constant près, les rapports entre les résidus obtenus en divisant $\varphi(x)$ par $\omega(x)$ (en changeant les signes selon la méthode de M. Sturm) et la fonction $\varphi(x)$. J'ai démontré cela dans la Note citée tout à l'heure, et j'ai fait voir de quelle manière on peut former ces dénominateurs et ces résidus en fonction des coefficients des polynômes $\varphi(x)$, $\omega(x)$.

Il faut observer que le théorème III est applicable aux deux suites des dénominateurs des réduites et des résidus, en supposant $\omega(x)$, $\varphi'(x)$ du même signe pour des valeurs réelles de la variable, propriété établie par M. Sturm (*Mémoires présentés*, tome VI, 1835, § 26).

Si l'on suppose

$$\omega(x) = \varphi'(x),$$

on obtient les résultats de MM. Sylvester, Cayley, Borchardt (*Nouvelles Annales*, 1854, tome XIII, page 71). Dans ce cas on a

$$\Delta_n = \varphi(x).$$

b. On peut aussi obtenir tout de suite les expressions Δ_r par une disposition convenable des fonctions $\psi_r(x)$. Je me bornerai au cas de

$$\omega(x) = \theta(x) \quad \text{et} \quad a = 1.$$

En posant

$$\varphi(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$$

et

$$\psi_r(x) = a_0 x^{r-1} + a_1 x^{r-2} + \ldots + a_{r-1},$$

$$A_{r,s} = B_{r,s}x - C_{r,s},$$

au moyen des relations connues entre les sommes des puissances des racines et les coefficients d'une équation, on obtient facilement

$$B_{r,s} = (n - s + 1) a_{r-1} a_{s-1}$$

$$- \left\{ \begin{array}{l} (s - r + 2) a_s a_{r-2} + (s - r + 4) a_{s+1} a_{r-3} + \ldots \\ + (s + r - 4) a_{s+r-3} a_1 + (s + r - 2) a_{s+r-2} a_0 \end{array} \right\}$$

$$- C_{r,s} = (s - r + 1) a_{r-1} a_s + (s - r + 3) b_{r-2} a_{s+1} + \ldots$$

$$+ (s + r - 1) a_0 a_{s+r-1},$$

et l'on aura

$$\Delta_r = \begin{vmatrix} B_{1,1}x - C_{1,1} & B_{1,1}x - C_{2,1} \ldots & B_{r,1}x - C_{r,1} \\ B_{1,2}x - C_{1,2} & B_{2,2}x - C_{2,2} \ldots & B_{r,2}x - C_{r,2} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ B_{1,r}x - C_{1,r} & B_{2,r}x - C_{2,r} \ldots & B_{r,r}x - C_{r,r} \end{vmatrix}$$

c. En supposant

$$\theta(x) = 1,$$

par conséquent $\omega(x)$ une fonction dont la valeur est positive pour toute valeur réelle de la variable

$$a = 1, \quad \psi_r(x) = x^{r-1}$$

et

$$S_i = \sum_m x_m^i \,\omega(x_m),$$

on a

$$\Delta_r = \begin{vmatrix} S_0 & S_1 \ldots & S_r \\ S_1 & S_2 \ldots & S_{r+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ S_{r-1} & S_r \ldots & S_{2r-1} \\ 1 & x \ldots & x^r \end{vmatrix}$$

résultat obtenu récemment par M. Joachimsthal (*Uber den Sturm'schen Satz*, *Journal* de Crelle, tome XLVIII, page 402).

III.

Des équations algébriques à deux inconnues.

1°. Soient

$$\varphi(x, y) = 0, \quad \lambda(x, y) = 0$$

deux équations algébriques des degrés u, v, et x_1, y_1, x_2, y_2,..., x_n, y_n les $n = uv$ systèmes de racines simultanées des mêmes équations. En indiquant par $\omega(x, y)$, $\theta(x, y)$ deux polynômes qui ont la propriété d'être de même signe pour toutes les valeurs réelles des variables; par $\psi_1(x, y)$, $\psi_2(x, y)$,..., $\psi_n(x, y)$, n fonctions rationnelles entières; et par a, c deux nombres impairs positifs ou négatifs; la forme quadratique

$$f = \sum_r \sum_s A_{r,s}\, u_r\, u_s,$$

dans laquelle

$$\mathrm{A}_{r,s} = \sum_{1}^{n}{}_{m} (x - x_m)^a (y - y_m)^c \frac{\omega(x_m, y_m)}{\theta(x_m, y_m)}$$
$$\times \psi_r(x_m, y_m)\, \psi_s(x_m, y_m),$$

est à coefficients réels; ce qu'on démontre comme ci-dessus.

En opérant comme dans la II[e] partie, on trouvera que, en supposant que x_1, y_1, x_{r+1}, y_{r+1}, x_2, y_2, x_{r+2}, $y_{r+2}, \ldots, x_r, y_r, x_{2r}, y_{2r}$ soient r couples de solutions simultanées imaginaires et que les autres solutions soient réelles, on peut mettre f sous la forme

$$f = 2 \sum_{1}^{r}{}_{s} \frac{1}{\alpha_s (l_s^2 + m_s^2)} \left\{ (\alpha_s \mathrm{P}_s + \beta_s \mathrm{Q}_s)^2 - (\alpha_s^2 + \beta_s^2) \mathrm{Q}_s^2 \right\}$$
$$+ \sum_{2r+1}^{n}{}_{m} (x - x_m)^a (y - y_m)^c \frac{\omega(x_m, y_m)}{\theta(x_m, y_m)}$$
$$\times \left\{ u_1 \psi_1(x_m, y_m) + \ldots + u_n \psi_n(x_m, y_m) \right\}^2,$$

P_s, Q_s étant les fonctions linéaires de u_1, u_2, etc., à coefficients réels. On pourra donc au moyen d'une substitution linéaire à coefficients réels transformer cette forme f dans la suivante :

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} f &= 2 \sum_{1}^{r}{}_{s} \frac{1}{\alpha_s (l_s^2 + m_s^2)} \left\{ v_s^2 - (\alpha_s^2 + \beta_s^2) v_{2s}^2 \right\} \\ &+ \sum_{2r+1}^{n}{}_{m} (x - x_m)^a (y - y_m)^c \frac{\omega(x_m, y_m)}{\theta(x_m, y_m)} v_m^2. \end{aligned} \right.$$

Or pour un système déterminé de valeurs réelles h, k de x et de y le nombre des termes positifs dans cette transformée est égal à r (nombre de couples des solutions simultanées imaginaires), plus le nombre des solutions simultanées réelles x_{2r+1}, $y_{2r+1}, \ldots$, x_n, y_n, pour lesquelles le produit $(h - x_m)(k - y_m)$ est positif; et le nombre des termes négatifs est égal à r augmenté du nombre des solutions simultanées réelles pour lesquelles $(h - x_m)(k - y_m)$ est négatif. Par conséquent, on a le théorème :

THÉORÈME IV. *Pour un système de valeurs réelles* h *et* k *de* x *et de* y *le nombre des permanences de signes dans la suite*

$$1, \; \Delta_1, \; \Delta_2, \ldots, \; \Delta_n$$

représente le nombre des couples de solutions simultanées imaginaires des équations

$$\varphi(x, y) = 0, \quad \lambda(x, y) = 0$$

augmenté du nombre des solutions réelles lesquelles sont à la fois plus grandes ou moindres que h, k, *et le nombre des variations de signes représente le nombre des couples de solutions simultanées imaginaires, plus le nombre des solutions réelles lesquelles ont la propriété d'être l'une plus grande, l'autre plus petite, ou réciproquement, que* h, k.

Il faut toujours se rappeler que les Δ sont des fonctions de $A_{r,s}$ fonction de x, y.

Corollaire. Si dans la suite supérieure on pose

$$x = h, \quad y = k,$$
$$x = h_1, \quad y = k_1,$$
$$(h_1 > h, \quad k_1 > k),$$

et si l'on indique par (h, k) le nombre des permanences que présente la suite, même dans la première hypothèse, on aura le nombre

$$p = \frac{1}{2}\left\{ (h, k) + (h_1, k_1) - (h, k_1) - (h_1, k) \right\}$$

égal au nombre des solutions simultanées réelles des équations données, qui sont à la fois plus grandes que h, k et moindres que h_1, k_1. En effet, en posant dans la transformée (16) h, k au lieu de x, y, on a

$$(h, k) = r + n - 2r;$$

analoguement

$$(h_1, k_1) = n - r, \quad (h, k_1) = r, \quad (h_1, k) = r$$

et, par conséquent,

$$p = n - 2r,$$

nombre des solutions simultanées supposées réelles.

On a donc aussi dans le cas des deux équations algébriques une infinité de fonctions qui ont la propriété de celles de M. Sturm. Admirable découverte due à M. Hermite (*).

2°. *Applications*. En supposant

$$\alpha = 1, \quad c = 1,$$
$$\theta(x, y) = \varphi'(x)\lambda'(y) - \varphi'(y)\lambda'(x),$$
$$\psi_r(x, y) = x^{a-r+1} y^{r-1},$$

et

$$S_{i,j} = \sum_m \frac{x_m^{j-i} y_m^i \,\omega(x_m, y_m)}{\theta(x_m, y_m)},$$

(*) *Comptes rendus*, t. XXXV, p. 52, 1852; t. XXXVI, p. 294, 1853. M. Hermite a publié récemment des théorêmes de *déterminants* sous forme d'appendice à un opuscule intitulé, je crois, *Questionnaire*, rédigé par MM. Gerono et Roguet. Puisse cette voie procurer une entrée dans l'enseignement à cette théorie désormais indispensable. TM.

on a

$$A_{r,s} = xy\,S_{\beta-2,2\alpha} - y\,S_{\beta-2,2\alpha+1} - x\,S_{\beta-1,2\alpha+1} + S_{\beta-1,2\alpha+2},$$

étant $\beta = r + s$. Les expressions $S_{i,j}$ pourront être déterminées en fonction des coefficients des équations données par la méthode indiquée par M. Jacobi dans son Mémoire *Theoremata nova algebraica, etc.* (*Journal* de Crelle, tome XIV).

Si l'on suppose

$$\omega(x, y) = \theta(x, y),$$

on a

$$S_{i,j} = \sum_m x_m^{j-i}\, y_m^i,$$

et ces expressions pourront être calculées par la méthode de Poisson (Serret, *Algèbre supérieure*, p. 103).

Enfin si l'on fait

$$\alpha = r + 1$$

et

$$S_i = y_1^i + y_2^i + \ldots + y_n^i,$$
$$T_i = x_1 y_1^i + x_2 y_2^i + \ldots + x_n y_n^i,$$

on a

$$A_{r,s} = y\,(x S_{\beta-2} - T_{\beta-2}) - (x S_{\beta-1} - T_{\beta-1}),$$

et en conséquence

$$\Delta_r = \begin{vmatrix} xS_0 - T_0 & xS_1 - T_1 \ldots & xS_1 - T_r \\ xS_1 - T_1 & xS_2 - T_2 \ldots & xS_{r+1} - T_{r+1} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ xS_{r-1} - T_{r-1} & xS_r - T_r \ldots & xS_{2r-1} - T_{2r-1} \\ 1 & y \ldots & y^r \end{vmatrix}$$

Ces dernières fonctions ont déjà été considérées par M. Hermite dans un cas particulier.

Il est évident qu'avec la méthode qu'on a suivie dans ce paragraphe pour établir le théorème IV et son corollaire, on pourra trouver des théorèmes et des corollaires analogues en considérant trois équations à trois inconnues, etc. (*).

IV.

Application des propriétés exposées dans le § Ier.

Soit

$$\varphi(x) = \begin{vmatrix} A_{1,1} - x & A_{2,1} & & A_{n,1} \\ A_{1,2} & A_{2,2} - x & & A_{n,2} \\ & & & \\ A_{1,n} & A_{2,n} & & A_{n,n} - x \end{vmatrix} = 0$$

Il est connu que, en supposant $A_{r,s} = A_{s,r}$ cette équation a toutes ces racines réelles, et M. Hermite a fait observer récemment que cette propriété a lieu aussi lorsque les quantités $A_{r,s}$ sont imaginaires, $A_{r,s}$ et $A_{s,r}$ étant conjugués et $A_{r,r}$ réels. En posant

$$x = h, \quad x = k$$

dans la suite

$$\varphi(x), \quad \varphi'(x), \quad \varphi''(x), \ldots, \quad \varphi^{(n)}(x)$$

la différence entre les nombres des variations correspondantes sera donc le nombre des racines de l'équation

$$\varphi(x) = 0$$

comprises entre h et k. Or, en posant dans le déterminant (13) (§ Ier, n° 5) $A_{r,r} - x$ au lieu de $A_{r,r}$, on voit facile-

(*) Ce beau travail fait entrevoir que le théorème de Sturm peut s'étendre à un système quelconque d'équations algébriques et se rattache immédiatement à la théorie des déterminants, théorie à peu près inconnue. TM.

ment que, à un facteur près, on a

$$\varphi^n(x) = 1, \quad \varphi^{(n-1)}(x) = -A_1, \ldots,$$
$$\varphi'(x) = (-1)^{n-1} A_{n-1}, \quad \varphi(x) = (-1)^n A_n$$

et la différence entre les nombres des permanences de signes de la suite

$$1, \; A_1, \; A_2, \ldots, \; A_n$$

correspondantes à $x = h$, $x = k$ sera le nombre des racines de l'équation

$$\varphi(x) = 0$$

comprises entre h et k. Et parce que en posant

$$\Delta_r = \begin{vmatrix} A_{1,1} - x & A_{2,1} \ldots & A_{r,1} \\ A_{1,2} & A_{2,2} - x \ldots & A_{r,2} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{r,1} & A_{2,r} & A_{r,r} - x \end{vmatrix}$$

la série

$$1, \; \Delta_1, \; \Delta_2, \ldots \; \Delta_n$$

donnera un même nombre de permanences que la série ci-dessus, on a le théorème :

THÉORÈME V. *La différence entre le nombre des permanences de signes dans cette dernière série correspondantes à* $x = h$, $x = k$ *donne le nombre des racines de l'équation*

$$\varphi(x) = 0$$

comprises entre h *et* k (*Comptes rendus*, 6 août 1855, *Remarque sur un théorème de M. Cauchy*, par M. Hermite).

On voit que cette dernière série est beaucoup plus simple que la série supérieure donnée par le théorème de Budan-Fourier.

Les Mémoires de MM. Hermite et Sylvester qu'on a trouvés plusieurs fois cités dans ce travail sont les suivants : *Sur l'extension du théorème de M. Sturm à un système d'équations simultanées* (*Comptes rendus*, 1852, 2^{e} semestre, p. 52). — *Remarque sur le théorème de M. Sturm* (*Comptes rendus*, 1853, 1er semestre, p. 294). — *On a theory of the syzigetic relations of two rationel integral functions, etc.* (*Philosophical Transactions*, 1853, part. III). C'est par ces travaux que ces deux illustres géomètres ont établi sur sa vraie base cette importante partie de l'Algèbre supérieure.