

V.-A. LEBESGUE

**Remarques diverses sur les nombres  
premiers**

*Nouvelles annales de mathématiques 1<sup>re</sup> série*, tome 15  
(1856), p. 236-239

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1856\\_1\\_15\\_\\_236\\_0](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1856_1_15__236_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1856, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---



---

**REMARQUES DIVERSES SUR LES NOMBRES PREMIERS**

( voir p. 130 );

PAR M. V.-A. LEBESGUE (SUITE).

**3. THÉORÈME.** *Chacune des formules*

$$8x + 1, \quad 8x + 3, \quad 8x + 5, \quad 8x + 7,$$

où  $x$  est un entier, renferme une infinité de nombres premiers.

Cette proposition dépend des trois propositions suivantes faciles à établir :

1°. La formule  $x^2 - 2$  n'a aucun diviseur premier de forme  $8k + 3$ ,  $8k + 5$ .

2°. La formule  $x^2 + 2$  n'a aucun diviseur premier de forme  $8k + 5$ ,  $8k + 3$ .

La démonstration est toute semblable à celle du théorème II.

Soit, s'il est possible,  $p = 8k + 3$  un diviseur de  $x^2 - 2$  plus petit qu'aucun diviseur des formes  $8k + 3$ ,  $8k + 5$ ; comme on peut toujours supposer  $x$  impair et plus petit que  $p$ ,  $x^2 - 2$  sera impair et de forme  $8m + 7$ .

Dans l'équation

$$x^2 - 2 = p \cdot y,$$

$y$  sera de forme  $8k + 5$  et inférieur à  $p$  (\*). Ainsi, d'après l'hypothèse,  $y$  ne saurait être premier. Si  $y$  est composé, on verra qu'un de ses facteurs est nécessairement de forme  $8k + 3$ ,  $8k + 5$ ;  $p$  ne serait donc pas un diviseur de  $x^2 - 2$  plus petit qu'aucun diviseur des formes  $8k + 3$ ,  $8k + 5$ .

On prouve de même la proposition relative aux diviseurs premiers de  $x^2 + 2$ .

3°. Les formules  $x^2 - a$ ,  $x^2 - am^2$  sont simultanément

---

(\*) Car on a  $py + 2 < p^2$ .

ment divisibles ou non divisibles par  $p$ , nombre premier à  $m$  et à  $a$ .

Si  $x^2 - a$  est divisible par  $p$ ,  $(mx)^2 - am^2$  l'est aussi. Si  $x^2 - am^2$  est divisible par  $p$ ,  $(kx)^2 - a(mk)^2$  l'est aussi, et l'on posera

$$mk = ph \pm 1.$$

4°. Il y a une infinité de nombres premiers de forme  $8k + 1$ .

$$x^4 + 1 = (x^2 - 1)^2 + 2x^2$$

n'a, d'après sa première forme, que des diviseurs  $8k + 1$  ou  $8k + 5$ ; d'après la seconde forme, il n'a pas de diviseurs  $8k + 5$ . Le nombre  $x^4 + 1$  n'a donc que des diviseurs premiers de forme  $8k + 1$ . Si la suite finie de ces diviseurs était  $p_1, p_2, \dots, p_i$ , en posant

$$x = p_1 p_2 \dots p_i,$$

on serait conduit à admettre que

$$(p_1 p_2 \dots p_i)^4 + 1$$

est premier ou divisible par un des nombres premiers  $p_1, p_2, \dots, p_i$ , ce qui est impossible.

5°. Il y a une infinité de nombres premiers de forme  $8k + 5$ .

Démonstration de même espèce en partant de  $x^2 + 1$  où l'on posera

$$x = 4y^4 + 2,$$

d'où

$$x^2 + 1 = 16y^4 (y^4 + 1) + 5,$$

quantité non divisible par 5. On posera ensuite

$$y = p_1 p_2 \dots p_i.$$

Les nombres  $p_i$  sont de forme  $8k + 5$ , 5 excepté.

6°. Il y a une infinité de nombres premiers de forme  $8k + 3$ .

En partant de la formule

$$x^2 + 2 = 8k + 3$$

pour  $x$  impair, on prouvera de même que la série des nombres premiers  $8k + 3$  est illimitée.

7°. De même, pour prouver que les nombres premiers de forme  $8k + 7$  sont en nombre illimité, on partira de la formule

$$x^2 - 2 = 8k + 7$$

pour  $x$  impair.

4. THÉOREME. *Sur la factorielle des nombres premiers.*

Le produit

$$1.2.3.4 \dots x = \Pi x$$

est ce qu'on nomme une *factorielle*.

Le produit

$$1.2.3.4.5.7.11 \dots p_x = P_x$$

est la factorielle des nombres premiers.

Par  $p_x$ , on indique le nombre premier qui approche le plus de  $x$  par défaut.

Le théorème suivant est dû à M. Tchebichef.

On a toujours

$$(a) \left\{ \begin{array}{l} \Pi x = P(x) \cdot P\left(\frac{x}{2}\right) \cdot P\left(\frac{x}{3}\right) \dots \\ P(\sqrt{x}) \cdot P\left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right) \cdot P\left(\sqrt{\frac{x}{3}}\right) \dots \\ P(\sqrt[3]{x}) \cdot P\left(\sqrt[3]{\frac{x}{2}}\right) \cdot P\left(\sqrt[3]{\frac{x}{3}}\right) \dots \\ \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

Si l'on convient de représenter par  $e\left(\frac{x}{\theta}\right)$  l'entier égal ou immédiatement inférieur à la quantité positive  $\frac{x}{\theta}$ , on voit tout de suite que si  $\theta$  est un nombre premier inférieur

à  $x$ , l'exposant de  $\theta$  dans le produit

$$P(x) \cdot P\left(\frac{x}{2}\right) \cdot P\left(\frac{x}{3}\right) \dots$$

sera  $e\left(\frac{x}{\theta}\right)$ .

L'exposant de  $\theta$  dans le produit

$$P(\sqrt{x}) \cdot P\left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right) \dots$$

sera de même  $e\left(\frac{x}{\theta^2}\right)$ .

Et ainsi de suite, de sorte que l'exposant de  $\theta$  dans le second membre de l'équation (a) sera

$$e\left(\frac{x}{\theta}\right) + e\left(\frac{x}{\theta^2}\right) + e\left(\frac{x}{\theta^3}\right) \dots,$$

qui, comme on le sait, est l'exposant de  $\theta$  dans le produit  $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots x$ .

Ce théorème a été introduit, je crois, dans l'*Arithmétique* de M. Bertrand, dont les traités élémentaires sont très-substantiels.