

E. COMBESURE

**Solution de la question 311**

*Nouvelles annales de mathématiques 1<sup>re</sup> série*, tome 15  
(1856), p. 181-183

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1856\\_1\\_15\\_\\_181\\_0](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1856_1_15__181_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1856, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## SOLUTION DE LA QUESTION 344 ;

PAR M. E. COMBESURE.

Déterminer l'aire d'un hyperboloïde de révolution à une nappe limitée par deux parallèles, connaissant la distance de ces deux parallèles, leurs rayons et la portion de génératrice rectiligne qu'ils interceptent.

En désignant par  $r$  le rayon d'un parallèle quelconque placé à la distance  $z$  du cercle de gorge, l'équation de l'hyperboloïde de révolution est

$$r^2 = a^2 + m^2 z^2,$$

et l'élément de surface de l'hyperboloïde compris entre deux parallèles distants de  $dz$  a pour expression

$$d\lambda = 2\pi r d\sigma,$$

où  $d\sigma$  représente l'élément de l'hyperbole génératrice, en sorte que

$$d\sigma = \sqrt{dr^2 + dz^2} = \frac{dz \sqrt{a^2 + n^2 z^2}}{r},$$

$$[n^2 = m^2 (1 + m^2)].$$

On a donc

$$d\lambda = 2\pi dz \sqrt{a^2 + n^2 z^2},$$

et, par suite,

$$\lambda = \frac{\pi}{n} \left\{ \begin{array}{l} nz_2 \sqrt{a^2 + n^2 z_2^2} - nz_1 \sqrt{a^2 + n^2 z_1^2} \\ + a^2 \log \frac{nz_2 + \sqrt{a^2 + n^2 z_2^2}}{nz_1 + \sqrt{a^2 + n^2 z_1^2}} \end{array} \right\},$$

$z_2, z_1$  étant les  $z$  des parallèles qui limitent la portion de surface considérée.

Si  $r_2, r_1$  désignent les rayons de ces mêmes parallèles, en sorte que

$$\begin{aligned} r_2^2 &= a^2 + m^2 z_2^2, \\ r_1^2 &= a^2 + m^2 z_1^2, \end{aligned}$$

l'élimination de  $m^2$  entre ces deux équations donne, en supposant  $z_2$  et  $z_1$  positifs,

$$(1) \quad \frac{z_2}{z_1} = \sqrt{\frac{r_2^2 - a^2}{r_1^2 - a^2}}.$$

Soient  $g$  la portion de génératrice rectiligne interceptée;  $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$  les coordonnées de ses extrémités, de façon que

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = g^2;$$

d'où, en posant

$$(2) \quad \begin{aligned} g^2 - (h^2 + r_1^2 + r_2^2) &= 2p, \quad (z_2 - z_1 = h), \\ x_1 x_2 + y_1 y_2 &= p. \end{aligned}$$

Les extrémités de  $g$  se projetant sur une même tangente au cercle de gorge, on a

$$\begin{aligned} x_1 \cos \varphi + y_1 \sin \varphi &= a, \\ x_2 \cos \varphi + y_2 \sin \varphi &= a, \end{aligned}$$

$\varphi$  étant un angle arbitraire dont l'élimination donne

$$(3) \quad x_1 y_2 - y_1 x_2 = \pm a \sqrt{g^2 - h^2}.$$

En ajoutant les équations (2) et (3) après les avoir élevées au carré, il vient

$$r_1^2 r_2^2 = a^2 (g^2 - h^2) + p^2;$$

d'où

$$a^2 = \frac{r_1^2 r_2^2 - p^2}{g^2 - h^2}.$$

Substituant dans l'équation (1) cette valeur de  $a^2$  et faisant, pour abrégér,

$$p + r_1^2 = p_1, \quad p + r_2^2 = p_2,$$

il vient

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{p_2}{p_1};$$

d'où et de

$$z_2 - z_1 = h$$

on déduit

$$z_2 = \frac{hp_2}{p_2 - p_1}, \quad z_1 = \frac{hp_1}{p_2 - p_1}$$

On a ensuite

$$m^2 = \frac{r_1^2 - a^2}{z_1^2},$$

c'est-à-dire, à cause de  $a^2 = \frac{p_1 p_2 - p(p_1 + p_2)}{p_1 + p_2}$ ,

$$m^2 = \frac{(p_2 - p_1)^2}{h^2(p_2 + p_1)}.$$

$z_2$ ,  $z_1$ ,  $a^2$  et  $m^2$  étant connus en  $p$ ,  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $h$ , ou si l'on veut en  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $g$  et  $h$ , on n'aura plus qu'à substituer leurs expressions précédentes dans celle de  $\lambda$  pour répondre complètement à la question. La substitution en elle-même ne présente aucune particularité digne d'être signalée.