NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Résolution des équations transcendantes (fin)

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 15 (1856), p. 17-22

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1856_1_15__17_1>

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS TRANSCENDANTES (Fin)

(voir tome XIV, page 394).

3e *Exemple :*

$$x - \operatorname{tang} x = 0,$$

équation que l'on rencontre dans la théorie des oscillations des corps élastiques et dans la théorie de la chaleur.

On peut écrire

$$\frac{x \cos x - \sin x}{\cos x} = 0,$$

et démontrer comme ci-dessus que les racines de l'équation

$$\frac{1}{\cos x} = 0$$

n'appartiennent pas à l'équation ; il suffit donc de considérer seulement l'équation

$$x \cos x - \sin x = 0.$$

A chaque racine α correspond une racine $-\alpha$; on n'a donc besoin que de chercher les racines positives. La plus petite de ces racines est zéro.

$$\begin{aligned} f''(x) &= -(x\cos x + \sin x), \\ f'(x) &= -x\sin x, \\ f(x) &= x\cos x - \sin x, \end{aligned}$$

ω étant une très-petite quantité, on obtient

$$\begin{array}{lccc} & f''(x), & f'(x), & f(x), \\ (\omega) \ldots\ldots & - & - & - \\ (90^\circ) \ldots\ldots & - & - & + \end{array}$$

il n'y a donc pas de racines entre 0 et 180°, et non plus, évidemment, entre 90 et 180 degrés.

On a

$$\begin{array}{lccc} (180^\circ + \omega) \ldots\ldots & + & + & - \\ (270^\circ) \ldots\ldots & + & + & + \end{array}$$

Il y a donc une racine entre ces limites; en les resserrant, on trouve

$$\begin{array}{lccc} & + & + & - \\ (4,4) \ldots\ldots & 2,3, & 4,187, & 0,4006, \\ & + & + & + \\ (4,5) \ldots\ldots & 1,92, & 4,398885, & 0,028949. \end{array}$$

(Il faut se rappeler que l'arc dont la longueur est 4,4 [rayon égale 1], contient 252° 6′ 5″, etc.)

$$\frac{2,3}{8,37} = 0,2, \quad k = 0, \quad n = 1,$$

limite extrême égale 4,5.

$$\frac{0,028}{4,398} = 0,00\ldots \text{ (car } 2n + k = 0)$$

1re approximation :

$$4,5 - 0,01 = 4,49, \quad f(4,49) < 0,$$

ainsi la racine est entre 4,49 et 4,5.

4,5 est encore limite extrême :

$$\frac{0,028949}{4,398885} = 0,0065 \quad (4n + k = 4).$$

2e approximation :

$$4,5 - 0,066 = 4,4934, \quad f(4,4934) < 0,$$

ainsi la racine est entre 4,4934 et 4,4935;

$$\frac{f(4,4935)}{f'(4,4935)} = \frac{0,000396339}{4,38627} = 0,00009035 \quad (8n + k = 8).$$

3e approximation :

$$4,4935 - 0,00009036 = 4,49340964,$$

exacte jusqu'à $(\frac{1}{10})^8$ près; cette valeur correspond à un arc de $257^\circ 27' 12'',9268$. Euler trouve

$$257^\circ 27' 12'' = 4,4934o834;$$

Poisson trouve 4,49331, expression déjà fautive à la quatrième décimale, il faut lire probablement 4,49341 (*).

On trouve de la même manière les autres racines qui sont en nombre infini.

4e *Exemple :*

$$(4 - 3x^2)\sin x - 4x\cos x = 0.$$

(*) *Mémoires de l'Académie des Sciences*, t. VIII, p. 420.

Poisson donne pour valeur de la seconde racine 7,73747; inexact dès la seconde decimale. La vraie valeur est 7,725

Cette équation se présente dans la théorie des oscillations d'une sphère élastique.

A chaque racine positive α correspond une racine négative $-\alpha$. Il suffit de chercher les racines positives.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (4 - 3x^2)\sin x - 4x\cos x,\\
f'(x) &= -x(3x\cos x + 2\sin x),\\
f''(x) &= (3x^2 - 2)\sin x - 8x\cos x;
\end{aligned}
$$

la fonction $f''(x)$ reste toujours négative dans l'intervalle de $x = 0$ à $x = 45°$.

Dans cet intervalle $f(x)$ peut être prise pour fonction déterminante; ω étant un très-petit arc, on obtient

$$
\begin{array}{lccc}
(\omega)\ \ldots\ldots & - & - & -\\
(45^\circ)\ldots\ldots & - & - & -
\end{array}
$$

il n'y a donc pas de racines entre 0 et 45 degrés.

$f''(x)$ change de signe dans l'intervalle de 45 à 90 degrés; on ne peut donc prendre $f''(x)$ pour fonction déterminante; on pourrait diviser cet intervalle en d'autres intervalles plus petits et de manière que $f''(x)$ ne change pas de signe, mais il est plus court de prendre les dérivées supérieures.

$$
\begin{aligned}
f'''(x) &= (3x^2 - 10)\cos x + 14x\sin x,\\
f^{\text{IV}}(x) &= (24 - 3x^2)\sin x + 20x\cos x,
\end{aligned}
$$

$f^{\text{IV}}(x)$ reste constamment positive entre 0 et 90 degrés; on a les deux suites

$$
\begin{array}{lccccc}
(0)\ \ldots\ldots & + & - & - & - & -\\
(90^\circ)\ldots\ldots & + & + & + & - & -
\end{array}
$$

Il y a une variation dans chaque suite, par conséquent point de racines entre 0 et 90 degrés.

Dans l'intervalle de 90 à 180 degrés, $f''(x)$ reste positive et l'on a

$$\begin{array}{ll}(90^\circ)\ \ldots\ldots & + \ - \ - \ - \ - \\ (180^\circ)\ \ldots\ldots & + \ + \ + \ + \ +\end{array}$$

Il existe donc une racine entre 90 et 180 degrés, c'est-à-dire entre $x = 1{,}5707951$ et $x = 3{,}1415927$. Resserrant ces limites, on trouve

$$\begin{array}{llll} & + & + & - \\ (2{,}5)\ldots\ldots & 26{,}04, & 12{,}029, & 0{,}816, \\ & + & + & + \\ (2{,}6)\ldots\ldots & 27{,}2, & 14{,}707, & 0{,}519.\end{array}$$

$$\frac{27{,}2}{2.12{,}029} = 1,\ldots, \quad k = -1, \quad n = 1;$$

ainsi la condition $n \overline{\gtrless} 1 - k$ n'est pas remplie. Resserrant encore les limites,

$$\begin{array}{llll} & + & + & - \\ (2{,}56)\ldots\ldots & 26{,}81, & 13{,}901, & \\ & + & + & + \\ (2{,}57)\ldots\ldots & 26{,}92, & 13{,}88437, & 0{,}09057.\end{array}$$

$$\frac{26{,}92}{2.13{,}8} = 0{,}9, \quad k = 0, \quad n = 2;$$

la condition est remplie; la limite *extrême* est 2,57, le quotient

$$\frac{0{,}09057}{13{,}88437} = 0{,}0065, \quad (2n + k = 4)$$

1re approximation :

$$2{,}57 - 0{,}0066 = 2{,}5634,$$

valeur trop petite.

Dans l'opération suivante, on obtient la valeur exacte jusqu'à la huitième décimale $(4n + k = 8)$.

$$\frac{f(2,5635)}{f'(2,5635)} = \frac{0,00090157}{13,7095659} = 0,00006576.$$

Ainsi la 2^e approximation est

$$2,5635 - 0,00006577 = 2,56343423.$$

Poisson trouve 2,56334 (*Mémoires de l'Académie des Sciences,* t. VIII, p. 420).

Il n'y a pas de racines entre 180 et 270 degrés ; il en existe une dans le quatrième quadrant et $f''(x)$ reste toujours négative dans cet intervalle ; on peut donc la prendre pour fonction déterminante.

	$-$	$-$	$+$
(6,0).....	75,7,	100,34,	6,01,
	$-$	$-$	$-$
(6,1).....	67,95,	107,53,	4,38.

On déduit successivement :

1re approximation......	6,05
2^e approximation......	6,0586
3^e approximation.....	6,0586701

Poisson trouve 6,05973.

Le nombre des racines est infini ; la $n^{ième}$ est comprise entre $(n - \frac{1}{2})\pi$ et $n\pi$.

Observation. Dans la dernière édition de l'excellente *Algèbre* de M. Bertrand, on donne une théorie simple des approximations pour les équations transcendantes, convenable aux examens, très-utile aux candidats. En fait d'approximations, les méthodes générales ne dispensent jamais d'imaginer des procédés particuliers pour des cas particuliers.