Observation sur un passage de l'algèbre de M. Bertrand (2e édition)

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 15 (1856), p. 172-175

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1856_1_15__172_0>

OBSERVATION SUR UN PASSAGE DE L'ALGÈBRE DE M. BERTRAND (2e édition).

C'est à la page 9, § 7. Voici l'énoncé.

« La forme des résultats précédents peut se simplifier » à l'aide d'une *convention* très-utile en algèbre, qui » consiste à regarder tous les termes d'un polynôme » comme *ajoutés* les uns aux autres, en nommant nom- » bres *négatifs* ceux qui sont précédés du signe —. Par » exemple, on regardera la différence $a - b$ comme ré- » sultant de l'addition de a avec $-b$.

[1] $$a - b = a + (-b);$$

» l'expression isolée $(-b)$ n'acquiert pour cela aucune » signification ; seulement on dit ajouter $-b$, au lieu de » dire retrancher b. On convient de même que retran- » cher $-b$ signifie ajouter b.

[2] $$a - (-b) = a + b.$$

» Il serait absurde de chercher à démontrer les formu- » les (1) et (2) : les définitions ne se démontrent pas. »

Certes on a le droit d'établir des conventions dès qu'elles n'influent pas sur le résultat ; dès que cette influence existe, ce droit cesse. C'est précisément ce qui a lieu ici ; $+(-b)$ égale $-b$, $-(-b)$ égale $+b$ sont des résultats. Si vous en faites des conventions, on pourrait en établir d'autres et d'un sens entièrement opposé, Que devient alors la certitude mathématique? Sans doute les définitions ne se démontrent pas, mais il serait par trop commode, pour se dispenser de démontrer une proposition, de la convertir en définition.

Ces *conventions* sont un échafaudage superflu, d'aucune nécessité pour construire la science. On évite cet embarras en se rappelant sans cesse que l'algèbre est une *arithmétique universelle,* indépendante de tout système de numération, et que l'arithmétique a pour but *unique* d'apprendre à compter soit en avant, soit en arrière, et de parvenir au résultat final par la voie la plus courte.

Pour donner du corps à cette pensée, imaginons une droite indéfinie; plaçons sur cette droite une infinité de boules égales; désignons une quelconque d'entre elles par la lettre Z, et chacune de celles qui sont à la droite de Z par D et à la gauche de Z par G. Lorsqu'en comptant on s'éloigne de Z dans la direction de D, l'opération se désigne par ce signe $+$; si c'est dans la direction de G, par le signe $-$.

Ainsi $+a-b$ désigne une double opération; on compte a boules dans la direction D, et, arrivé à la fin, on rétrograde de b boules dans la direction G.

$$+(+a-b)+(+c-d)$$

signifie : 1° la double opération $+a-b$, premier résultat; 2° la double opération $+c-d$, deuxième résultat; 3° l'opération $+$ sur le premier résultat et l'opération $+$ sur le second résultat. Ces quatre opérations se réduisent aussi à celle-ci

$$+a-b+c-d;$$

de même

$$+(+a-b)-(+c-d)$$

se réduit à

$$+a-b-c+d.$$

Cette représentation figurée suffit pour tout expliquer

Il faut d'ailleurs remarquer qu'on n'opère réellement jamais que sur des nombres entiers. $\frac{7}{3}$ est la même chose que le nombre 7, excepté que l'unité de ce nombre, au lieu d'être représentée par 1, est représentée par $\frac{1}{3}$.

A la page 19, à propos de la multiplication, on trouve encore une *convention*. Que dirait Leibnitz d'une mathématique conventionnelle ?

Si l'on obligeait les géomètres à expliquer ce qu'ils veulent faire, il n'y aurait jamais de difficulté sur le sens des opérations. Je veux multiplier $-a$ par $-b$, qu'entendez-vous par là ?

A quel propos applique-t-on ci-dessus l'épithète de *négatifs* aux nombres précédés du signe —; en quoi sont-ils moins *affirmatifs* que les nombres précédés du signe +? C'est qu'on veut obvier, à la page 9, à une difficulté qui ne se présente qu'à la page 10. En bonne logique, dans les ouvrages élémentaires, il ne faut jamais définir un objet, expliquer une difficulté avant que l'objet, la difficulté aient pris naissance. Et c'est pourtant ce qu'on fait toujours; *inde labes*.

Pour les imaginaires, l'auteur a encore recours à une *convention*. Il ne s'agit pourtant que d'un signe *mnémonique*. $\sqrt{-1}$ rappelle que dans l'équation

$$x^2+1=0$$

il faut remplacer x^2 par -1, ce qui est évident. Le grand Euler lui-même s'est trompé en cet endroit. Au numéro 148 de ses *Éléments*, il met

$$\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-3}=\sqrt{6},$$

et déjà Bombelli, le créateur du calcul des imaginaires, donne l'équation vraie

$$\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} = - \sqrt{ab},$$

et avant lui Cardan se sert de l'expression *moins sophistiqués* pour désigner les racines imaginaires, et, appelant les quantités négatives simples des *moins purs*, il déclare que les *sophistiqués* sont d'*inutiles subtilités*. Nouvel exemple de la réserve qu'il faut mettre dans ces déclarations d'utilité et d'inutilité dont sont si prodigues les hommes qui croient *εἶναί τι*. Aujourd'hui les imaginaires, avec les déterminants et les infiniment petits, forment la partie la plus importante, la plus féconde de toutes les branches de l'analyse et de la géométrie. Notre plus éminent analyste, notre plus éminent géomètre, MM. Cauchy et Chasles, font constamment emploi des imaginaires et en déduisent les plus beaux théorèmes.

L'*Algèbre* de M. Bertrand, comme tout ce qui sort de cette plume, a un mérite tellement supérieur, qu'on ne saurait trop insister sur des défauts, inhérents à toute œuvre humaine.

Sous forme d'exercices, l'ouvrage contient les principaux résultats de transformation fonctionnelle déduits de la théorie des déterminants, mais qu'on a soin de ne pas désigner, cette théorie n'étant pas admise dans le Programme; de même pour d'autres théories. Les exemples empruntés à Gauss, Jacobi, Eisenstein, Cayley, Sylvester, sont d'un choix exquis; les solutions ne tarderont pas sans doute à paraître. Le célèbre auteur, fidèle à son système, ne cite personne; en ne citant personne, personne n'a à se plaindre.