Méthode de quadrature de Cotes ; d'après Gauss

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 15 (1856), p. 109-129

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1856_1_15__109_0>

MÉTHODE DE QUADRATURE DE COTES;

D'APRÈS GAUSS (*).

1. *Lemme*. Soit

$$Y = \sum_0^n \frac{A(\mu)\,T(\mu)}{M(\mu)};$$

le signe sommatoire se rapporte à l'indice μ.

n est un nombre positif entier donné et μ prend successivement les $n+1$ valeurs $0, 1, 2, \ldots n$; les A sont des constantes données,

$$T_{(\mu)} = \frac{nt(nt-1)(nt-2)\ldots(nt-n)}{nt-\mu};$$

t une variable; de sorte que

$$T_{(\mu)} = nt\,(nt-1)\,(nt-2)\ldots(nt-\mu+1)$$
$$(nt-\mu-1)\ldots(nt-n).$$

Désignons par $M_{(\mu)}$ la valeur numérique que prend $T_{(\mu)}$ en y faisant $nt=\mu$, on aura

$$M_{(\mu)} = \mu\,(\mu-1)\,(\mu-2)\ldots1.-1.-2\ldots\mu-n,$$
$$T_0 = (nt-1)\,(nt-2)\ldots(nt-n),$$
$$M_0 = -1.-2.-3\ldots-n.$$

Le premier terme de Y est

$$\frac{A\,(nt-1)\,(nt-2)\ldots(nt-n)}{(-1)(-2)(-3)\ldots(-n)}.$$

On met A au lieu de $A_{(0)}$.

(*) *Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi*, autore Carolo Friderico Gauss, Societati regiæ Scientiarum exhibita D. 16 septembris 1814, p. 39-76.

Le deuxième terme est

$$\frac{A_1\, nt\,(nt-2)\ldots(nt-n)}{1.-1\ldots 1-n},$$

le dernier terme est

$$\frac{A_n\, nt\,(nt-1)\ldots(nt-n+1)}{n(n-1)\ldots 1}.$$

Faisant successivement t égal à l'un des nombres de la suite

$$0,\quad \frac{1}{n},\quad \frac{2}{n},\quad \frac{3}{n},\ldots,\quad \frac{n}{n},$$

les $n+1$ valeurs numériques correspondantes de Y sont

$$A,\ A_1,\ A_2,\ A_3,\ldots\ A_n.$$

Si Y_1 est une autre fonction de t, ayant ces mêmes valeurs pour les mêmes valeurs de t, $Y'-Y$ sera divisible par les $(n+1)$ facteurs

$$t,\quad t-\frac{1}{n},\quad t-\frac{2}{n},\ldots,\quad t-1,$$

et, par conséquent, par le produit de ces facteurs. Il faut donc que Y_1 soit d'un degré plus élevé que t; ainsi de toutes les fonctions de t qui donnent ces valeurs A, $A_1,\ldots,A_n$ pour les valeurs correspondantes de t, la moins élevée est la fonction Y.

Corollaire. Si une fonction de t étant développée suivant les puissances de t est interrompue avant le terme qui renferme t^{n+1}, cette fonction est identique avec la fonction Y.

2. Soit à intégrer $\int_g^h y\,dx$ par la méthode des rectangles; où y est une série ordonnée suivant les puissances croissantes de x.

Faisons

$$h - g = \Delta,$$

donnons successivement à x les $n + 1$ valeurs

$$g, \quad g + \frac{\Delta}{n}, \quad g + \frac{2\Delta}{n}, \quad g + \frac{3\Delta}{n}, \ldots, \quad g + \frac{n\Delta}{n},$$

et supposons que les valeurs correspondantes de y sont

$$A, \ A_1, \ A_2, \ldots \ A_n.$$

Posons

$$x = g + \Delta t,$$

où t est une nouvelle variable et y devient fonction de t.

Alors

$$\int y\, dx = \Delta \int y\, dt.$$

Remplaçons y par Y et l'on aura

$$\int y\, dx = \Delta \int \mathrm{Y}\, dt.$$

Développant $T_{(\mu)}$ suivant les puissances décroissantes de t, on a

$$T_{(\mu)} = \alpha t^n + \beta t^{n-1} + \gamma t^{n-2} + \delta t^{n-3} + \ldots,$$

$$\int_0^1 T_\mu \, dt = \frac{\alpha}{n+1} + \frac{\beta}{n} + \frac{\gamma}{n-1} + \frac{\delta}{n-2} + \ldots = M_\mu R_\mu,$$

M_μ est un nombre, donc R_μ est aussi un nombre. On aura

$$\Delta \int_0^1 y\, dt = \Delta \int_0^1 \sum \frac{T_\mu \, dt}{M_{(\mu)}}$$

$$= \Delta (AR + A_1 R_1 + A_2 R_2 + \ldots + A_n R_n).$$

Car

$$g = 0, \quad h = 1, \quad \Delta = 1.$$

Cette intégrale est exacte.

Exemple :

$$n = 5, \quad \mu = 2,$$

$$\begin{aligned} T_2 &= 5t(5t-1)(5t-3)(5t-4)(5t-5) \\ &= 5^5 t^5 - 13.5^4.t^4 + 59.5^3.t^3 - 107.5^2.t^2 + 60.5\, t, \end{aligned}$$

$$M_2 = 2.1. - 1. - 2. - 3 = -12,$$

$$\begin{aligned} \alpha &= 3125, \\ \beta &= -6125, \\ \gamma &= 7375, \\ \delta &= -2675, \\ \varepsilon &= 300; \end{aligned}$$

$$-12\, R_2 = \frac{3125}{6} - 1625 + \frac{7375}{4} - \frac{2675}{3} + \frac{300}{2} = -\frac{25}{12},$$

$$R_2 = \frac{25}{144}.$$

3. On peut abréger ce calcul. Posons

$$2t - 1 = u,$$

alors

$$T_{(\mu)} = \frac{(nu+n)(nu+n-2)(nu+n-4)\ldots(nu-n+4)(nu-n+2)(nu-n)}{2^n(nu+n-2\mu)}.$$

Posons

$$\frac{(n^2u^2 - n^2)[n^2u^2-(n-2)^2][n^2u^2-(n-4)^2][n^2u^2-(n-6)^2]\ldots}{n^2u^2-(n-2\mu)^2} = U_{(\mu)}.$$

Lorsque n est pair, le numérateur se termine par $(n^2u^2 - 4)\,nu$, et lorsque n est impair par

$$(n^2u^2 - 9)(n^2u^2 - 1),$$

et

$$T_{\mu} = \frac{nu - n + 2\mu}{2^n}\, U_{(\mu)},$$

$U_{(\mu)}$ est de degré $n - 1$ en u; et

$$\int_0^1 T_\mu\,dt = \int_{-1}^{+1} \frac{1}{2} T_\mu\,du$$

$$= \int_{-1}^{+1} \frac{nu\,U_\mu\,du}{2^{n+1}} + \int_{-1}^{+1} \frac{(2\mu - n)\,U_\mu\,du}{2^{n+1}}.$$

Posons

$$U_{(\mu)} = \alpha u^{n-1} + \beta u^{n-3} + \gamma u^{n-5} + \ldots$$

Si n est pair la seconde intégrale s'évanouit, et si n est impair la première s'évanouit.

Ainsi pour n pair,

$$\int_0^1 T_\mu\,dt = \frac{1}{2^n}\left(\frac{\alpha}{n+1} + \frac{\beta}{n-1} + \frac{\gamma}{n-3} + \frac{\delta}{n-5} + \ldots\right);$$

pour n impair,

$$\int_0^1 T_\mu\,dt = \frac{2\mu - n}{2^n}\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n-2} + \frac{\gamma}{n-4} + \frac{\delta}{n-6} + \ldots\right).$$

U_μ ne change pas en remplaçant $n - 2\mu$ par $2\mu - n$, c'est-à-dire en remplaçant μ par $n - \mu$, donc

$$U_{(\mu)} = U_{(n-\mu)}.$$

Ainsi

$$\int_0^1 T_{(n-\mu)}\,dt = \pm \int_0^1 T_\mu\,dt,$$

le signe supérieur pour n pair et le signe inférieur pour n impair; et comme

$$M_{n-\mu} = \pm M_\mu,$$

on a donc toujours

$$R_{n-\mu} = R_\mu.$$

Ainsi, dans les coefficients R, R_1, R_2,..., R_n,

$$R = R_n, \quad R_1 = R_{n-1}, \quad R_2 = R_{n-2}, \ldots.$$

Table des valeurs de R, *d'après Cotes*

Valeurs de n.				
1	$R = R_1 = \frac{1}{2}.$			
2	$R = R_2 = \frac{1}{6},$	$R_1 = \frac{2}{3}.$		
3	$R = R_3 = \frac{1}{8},$	$R_1 = R_2 = \frac{3}{8}.$		
4	$R = R_4 = \frac{7}{90},$	$R_1 = R_3 = \frac{16}{45},$	$R_2 = \frac{2}{15}.$	
5	$R = R_5 = \frac{19}{288},$	$R_1 = R_4 = \frac{25}{96},$	$R_2 = R_3 = \frac{25}{144}.$	
6	$R = R_6 = \frac{11}{840},$	$R_1 = R_5 = \frac{9}{35},$	$R_2 = R_4 = \frac{9}{280},$	$R_3 = \frac{34}{105}.$
7	$R = R_7 = \frac{751}{17280},$	$R_1 = R_6 = \frac{3577}{17280},$	$R_2 = R_5 = \frac{49}{640},$	$R_3 = R_4 = \frac{20}{172}$
8	$R = R_8 = \frac{980}{28350},$	$R_1 = R_7 = \frac{2944}{14175},$	$R_2 = R_6 = -\frac{464}{14175},$	$R_3 = R_5 = \frac{524}{141}$
9	$R = R_9 = \frac{2857}{89600},$	$R_1 = R_8 = \frac{15741}{89600},$	$R_2 = R_7 = \frac{27}{2240},$	$R_3 = R_6 = \frac{1209}{5000}$
10	$R = R_{10} = \frac{16067}{598752},$	$R_1 = R_9 = \frac{26575}{149688},$	$R_2 = R_8 = -\frac{16175}{199584},$	$R_3 = R_7 = \frac{567}{124}$

4. *Évaluation de l'erreur.*

Soit

$$\int_0^1 t^m\,dt = \frac{1}{m+1} = \text{valeur exacte}.$$

Partageons l'intervalle de o à 1 en $n+1$ parties égales

$$0,\quad \frac{1}{n},\quad \frac{2}{n},\quad \frac{3}{n},\ldots,\quad \frac{n}{n},$$

$$\Delta = h - g = 1,$$

les $n+1$ valeurs de A sont

$$0,\quad \frac{1}{n^m},\quad \left(\frac{2}{n}\right)^m,\quad \left(\frac{3}{n}\right)^m,\ldots,\quad \left(\frac{n}{n}\right)^m;$$

donc

$$\int_0^1 t^m\,dt = \frac{1}{n^m}\left[\mathrm{R}_1 + 2^m.\mathrm{R}_2 + 3^m.\mathrm{R}_3 + \ldots + n^m.\mathrm{R}_n\right],$$

valeur approchée.

Désignons par $k_{(m)}$ la différence des deux valeurs, on a

$$k_{(m)} = \frac{1}{m+1} - \frac{1}{n^m}\left[\mathrm{R}_1 + 2^m\,\mathrm{R}_2 + 3^m\,\mathrm{R}_3 + \ldots + n^m\,\mathrm{R}_n\right],$$

$$k = 1 - \mathrm{R}_1 - \mathrm{R}_2 - \ldots - \mathrm{R}_n, \quad \text{car} \quad m = 0.$$

Développant y suivant les puissances croissantes de t,

$$y = \mathrm{K} + \mathrm{K}_1\,t + \mathrm{K}_2\,t^2 + \mathrm{K}_3\,t^3 + \ldots,$$

alors

$$k_{(m)} = \mathrm{K}\,k + \mathrm{K}_1\,k_1 + \mathrm{K}_2\,k_2 + \mathrm{K}_3\,k_3 + \ldots + \mathrm{K}_n\,k_n.$$

Car pour t^0 la différence est k, pour t^1 la différence est k_1, etc.

Tant que le développement de y ne dépasse pas n, la valeur approchée se confond avec la vraie valeur; ainsi

$k_{(0)}, k_{(1)}, k_{(2)}, \ldots, k_{(n)}$ sont nuls et la correction ne commence qu'à k_{n+1}. En effet, tant que m est moindre que n, y est identique avec Y et l'intégration est exacte telle qu'elle a été donnée ci-dessus. Donc

$$k_m = K_{n+1} k_{n+1} + K_{n+2} k_{n+2} + \ldots$$

Exemple.

$$n = 1,\quad k_2 = -\frac{1}{6},\qquad k_3 = -\frac{1}{4},\qquad k_4 = -\frac{3}{10},$$

$$n = 2,\quad k_3 = 0,\qquad k_4 = -\frac{1}{120},\qquad k_5 = -\frac{1}{48},$$

$$n = 3,\quad k_4 = -\frac{1}{270},\qquad k_5 = -\frac{1}{108},$$

$$n = 4,\quad k_5 = 0,\qquad k_6 = -\frac{1}{2688},\qquad k = -\frac{1}{768},$$

$$n = 5,\quad k_6 = -\frac{11}{32500},\qquad k = -\frac{11}{15000},$$

$$n = 6,\quad k_7 = 0,\qquad k_8 = -\frac{1}{38880},\qquad k_9 = -\frac{1}{8640},$$

$$n = 7,\quad k_8 = -\frac{167}{10588410},\qquad k_9 = -\frac{167}{2352980},$$

$$n = 8,\quad k_9 = 0,\qquad k_{10} = -\frac{37}{173015040},\qquad k_{11} = -\frac{37}{3145728}$$

Pour $n = 1$,

$$k_1 = 0,$$

$$k_1 = \frac{1}{2+1} - \frac{1}{1^2} R_1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}$$

Pour $n = 2$,

$$k_1 = k_2 = 0,$$

$$k_3 = \frac{1}{3+1} - \frac{1}{2^3}(R_1 + 2^3 R\ ) = \frac{1}{4} - \frac{1}{8}\left(\frac{2}{3} + \frac{8}{6}\right) = 0,$$

$$k_4 = \frac{1}{5} - \frac{1}{2^4}(R_1 + 2^4 R^2 + 3) = \frac{1}{5} - \frac{1}{66}\left(\frac{2}{3} + \frac{16}{6}\right) = -\frac{1}{120}$$

On a en général pour n pair

$$k_{n+1} = 0,$$

et

$$k_{n+3} = \frac{n+3}{2} k_{(2n+2)}.$$

En effet, soit l_m la différence entre la valeur vraie et la valeur approchée de

$$\int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)^m dt,$$

on a

$$l_{(m)} = \int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)^m dt$$

$$- \left[\begin{array}{c} \left(-\frac{1}{2}\right)^m R + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2}\right)^m R_1 + \left(\frac{2}{n} - \frac{1}{2}\right)^m R_2 \\ + \left(\frac{3}{n} - \frac{1}{2}\right)^m R_3 + \ldots + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right)^m R_{n-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^m R_n \end{array}\right].$$

Pour m impair l'intégrale et la série s'évanouissent; car

$$R_p = R_{n-p}.$$

Pour m et n pairs

$$l_m = \frac{1}{2^m (m+1)} - \frac{2}{n^m}$$

$$\times \left[\begin{array}{c} \left(\frac{1}{2}n\right)^m R + \left(\frac{1}{2}n - 1\right)^m R_1 + \left(\frac{1}{2}n - 2\right)^m R_2 + \ldots \\ + 2^m R_{\frac{1}{2}n-2} + R_{\frac{1}{2}n-1} \end{array}\right].$$

Pour m pair et n impair

$$l_m = \frac{1}{2^m}\left[\frac{1}{m+1} - \frac{2}{n^m} n^m R + (n-2)^m R_1 + (n-4)^m R_2 + \ldots + 3^m R_{\frac{n-3}{2}} + R_{\frac{n-1}{2}}\right].$$

Développons y suivant les puissances $t-\frac{1}{2}$:

$$y = \mathrm{L} + \mathrm{L}_1\left(t-\frac{1}{2}\right) + \mathrm{L}_2\left(t-\frac{1}{2}\right)^2 + \mathrm{L}_3\left(t-\frac{1}{2}\right)^3 + \ldots;$$

la correction sera

$$l_m = \mathrm{L}\,l + \mathrm{L}_2\,l_2 + \mathrm{L}_4\,l_4 + \mathrm{L}_6\,l_6 + \ldots.$$

Car pour toute valeur de m qui ne surpasse pas n, $l_{(m)}$ s'évanouit.

Ainsi la correction sera pour n pair

$$\mathrm{L}_{n+1}\,l_{n+2} + \mathrm{L}_{n+4}\,l_{n+4} + \mathrm{L}_{n+6}\,l_{n+6} + \ldots,$$

pour n impair

$$\mathrm{L}_{n+1}\,l_{n+1} + \mathrm{L}_{n+3}\,l_{n+3} + \mathrm{L}_{n+5}\,l_{n+5} + \ldots,$$

On a

$$\left(t-\frac{1}{2}\right)^m = t^m - \frac{1}{2}\,mt^{m-1} + \frac{1}{4}\,\frac{m(m-1)}{1.2}\,t^{m-2} + \ldots,$$

donc

$$l_m = k_m - \frac{1}{2}\,mk_{m-1} + \frac{1}{4}\,\frac{m(m-1)}{1.2}\,k_{m-2} + \ldots,$$

car pour t^m la correction est k_m, etc.

Et de même

$$k_m = l_m + \frac{1}{2}\,m\,l_{m-1} + \frac{1}{4}\,\frac{m(m-1)}{1.2}\,l_{m-2}$$

(où il faut rejeter les l d'indice impair).

Il faut dans les deux séries (p. 115) ne commencer qu'à $n+1$.

$$k_{n+1} = l_{n+1},$$

$$k_{n+2} = l_{n+2} + \frac{1}{2}(n+2)\,l_{n+1},$$

$$k_{n+3} = l_{n+3} + \frac{1}{2}(n+3)\,l_{n+2} + \frac{1}{4}\,\frac{(n+3)(n+2)}{1.2}\,l_{n+1},$$

car

$$k_n = k_{n-1} = k = 0,$$
$$l_n = l_{n-1}, \quad l = 0.$$

Donc si n est pair,

$$k_{n+1} = 0,$$
$$k_{n+2} = l_{n+2},$$
$$k_{n+3} = \frac{n+3}{2} l_{n+2} = \frac{n+3}{2} k_{n+2};$$

si n est impair,

$$k_{n+1} = l_{n+1},$$
$$k_{n+2} = \frac{n+2}{2} l_{n+1} = \frac{n+2}{2} k_{n+1};$$

ce qui démontre les relations indiquées ci-dessus.

Il est toujours avantageux dans la méthode de Cotes, de prendre n pair, parce qu'alors $k_{n+1} = 0$ et la correction est de l'ordre $n+1$.

Autre intégration par approximation.

$$\int_g^h y\,dx, \qquad g - h = \Delta, \qquad \Delta t = x - g,$$
$$\int_g^h y\,dx = \Delta \int_0^1 y\,dt,$$

y devient fonction de t.

Soit

$$\begin{aligned}
\mathrm{Y} = {} & \mathrm{A}\,\frac{(t-a_1)(t-a_2)(t-a_3)\ldots(t-a_n)}{(a-a_1)(a-a_2)(a-a_3)\ldots(a-a_n)} \\
& + \mathrm{A}_2\,\frac{(t-a)(t-a_2)(t-a_3)\ldots(t-a_n)}{(a_1-a)(a_2-a)(a_3-a)\ldots(a_n-a)} \\
& + \mathrm{A}_2\,\frac{(t-a)(t-a_1)(t-a_3)\ldots(t-a_n)}{(a_2-a)(a_2-a_1)(a_2-a_3)\ldots(a_1-a_n)} \\
& \vdots \\
& \mathrm{A}_n\,\frac{(t-a)(t-a_1)(t-a_2)\ldots(t-a_{n-1})}{(a_n-a)(a_n-a_1)(a_n-a_2)\ldots(a_n-a_{n-1})}.
\end{aligned}$$

Supposons que pour ces valeurs de

t	correspondent les valeurs de	y,
a	—	A,
a_1	—	A_1,
a_2	—	A_2,
$\vdots$		$\vdots$
a_n	—	A_n.

y est identique avec Y tant que le degré de y ne dépasse pas n, ou lorsque des termes de degré supérieur à n peuvent être négligés (p. 110).

Soit

$$\begin{aligned} T &= (t-a)(t-a_1)(t-a_2)\ldots(t-a_n) \\ &= t^{n+1} + \alpha t^n + \alpha_1 t^{n-1} + \alpha_2 t^{n-2} + \ldots + \alpha_n. \end{aligned}$$

Désignant par M, M_1, M_2,..., les valeurs des numérateurs dans Y en y faisant t successivement égal à a, a_1, a_2, a_n, on aura

$$Y = \frac{AT}{M(t-a)} + \frac{A_1 T}{M_1(t-a_1)} + \frac{A_2 T}{M_2(t-a_2)} + \ldots + \frac{A_n T}{M_n(t-a_n)};$$

M, M_1, M_2,..., M_n sont les valeurs de $\frac{dT}{dt}$ pour $t = a$, a_1, a_2,..., a_n.

$$\begin{array}{r|r|r|r} \frac{T}{t-a} = t^n + a & t^{n-1} + a^2 & t^{n-2} + a^3 & t^{n-3} + \ldots + a^n \\ \alpha & a\alpha & \alpha a^2 & \alpha a^{n-1} \\ & \alpha_1 & \alpha_1 a & \alpha_1 a^{n-2} \\ & & \alpha_2 & \alpha_2 a^{n-3} \\ & & & \vdots \\ & & & \alpha_{n-1} \end{array}$$

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{T}\,dt}{t-a} = \frac{1}{n+1} + \frac{a}{n} + \frac{a^2}{n-1} + \frac{a^3}{n-2} + \ldots + a^n$$

$$\frac{a}{n} + \frac{\alpha a}{n-1} + \frac{\alpha a^2}{n-2} + \ldots + \alpha\, a^{n-1}$$

$$\frac{\alpha_1}{n-1} + \frac{\alpha_1 a}{n-2} + \ldots + \alpha_2 a^{n-3}$$

$$\frac{\alpha_2}{n-2} + \ldots + \alpha_{n-1}$$

$$= a^n + \alpha a^{n+1} + \alpha_1 a^{n-2} + \alpha_2 a^{n-3} + \ldots \alpha_{n-1}$$

$$+ \frac{1}{2}\left[a^{n-1} + \alpha a^{n-2} + \alpha_1 a^{n-3} + \ldots + \alpha_{n-2}\right]$$

$$+ \frac{1}{3}\left[a^{n-2} + \alpha a^{n-3} + \alpha_1 a^{n-4} + \ldots + \alpha_{n-3}\right]$$

$$+ \frac{1}{4}\left[a^{n-3} + \alpha a^{n-4} + \alpha' a^{n-5} + \ldots + a_{n-4}\right]$$

$$+ \ldots$$

$$+ \frac{1}{n-1}\left[a^2 + \alpha a + a'\right]$$

$$+ \frac{1}{n}\left[a + \alpha\right]$$

$$+ \frac{1}{n+1}.$$

Soit

$$\mathrm{T} \log\left(\frac{1}{1-t^{-1}}\right) = \mathrm{T}\left(t^{-1} + \frac{1}{2}t^{-2} + \frac{1}{3}t^{-3} + \frac{1}{2}t^{-4} + \ldots\right)$$
$$= \mathrm{T}' + \mathrm{T}'',$$

où T' représente la somme des termes où l'exposant de t est positif et T'' la somme des termes où cet exposant est négatif.

En faisant $t = a$ dans T', on obtient la série ci-dessus pour

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{T}\,dt}{t-a}.$$

Désignant par $R, R_1, R_2, R_3, \ldots, R_n$ les valeurs que prend

$$\frac{T'}{\left(\frac{dT}{dt}\right)}$$

en y remplaçant successivement t par $a, a_1, a_2, a_3, \ldots,$ a_n, on aura

$$\int_0^1 Y\,dt = AR + A_1 R_1 + A_2 R_2 + \ldots + A_n R_n,$$

$$\int_g^h y\,dx = \Delta \int_0^1 Y\,dt,$$

vraie ou approchée.

Faisons

$$u = 2t - 1, \quad b = 2a - 1,$$
$$b_1 = 2a_1 - 1, \quad b_2 = 2a_2 - 1 \ldots,$$

alors

$$T = \frac{U}{2^{n+1}}, \quad U = (u-b)(u-b_1)(u-b_2)\ldots(u-b_n),$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{2^n}\frac{dU}{du};$$

ainsi on aura M, M_1, M_2, etc., si l'on remplace successivement u par $b, b_1, b_2, \ldots, b_n$ dans $\frac{1}{2^n}\frac{dU}{du}$.

$$\log \frac{1}{1-t^{-1}} = \log \frac{1+u^{-1}}{1-u^{-1}}$$
$$= 2u^{-1} + \frac{2}{3}u^{-3} + \frac{2}{5}u^{-5} + \frac{2}{7}u^{-7} + \ldots.$$

Faisons

$$U\left(u^{-1} + \frac{1}{3}u^{-3} + \frac{1}{5}u^{-5} + \frac{1}{7}u^{-7} + \ldots\right) = U' + U'',$$

où U' est la partie à exposants positifs, on aura

$$T' + T'' = \frac{1}{2^n}(U' + U'');$$

donc

$$U' = 2^n T', \quad U'' = 2^n T''.$$

Ainsi on trouve les valeurs de R, R_1, R_2, R_3, etc., en faisant successivement $u = b$, b_1, b_2, b_3, etc., dans

$$\frac{U'}{\left(\frac{dU}{du}\right)}.$$

3. *Applications numériques.*

$$n = 5, \quad a = 0,$$

$$a_1 = \frac{1}{5}, \quad a_2 = \frac{2}{5}, \quad a_3 = \frac{3}{5}, \quad a_4 = \frac{4}{5}, \quad a_5 = 1,$$

$$T = t^6 - 3t^5 + \frac{17}{5}t^4 - \frac{9}{5}t^3 + \frac{274}{625}t^2 - \frac{24}{625}t,$$

$$T' = t^5 - \frac{5}{2}t^4 + \frac{67}{30}t^3 + \frac{17}{20}t^2 + \frac{913}{7500}t - \frac{10}{7500},$$

$$\frac{T'}{\left(\frac{dT}{dt}\right)} = \frac{t^5 - \frac{5}{2}t^4 + \frac{67}{30}t^3 - \frac{17}{20}t^2 + \frac{913}{7500}t - \frac{10}{7500}}{6t^5 - 4t^4 + \frac{68}{5}t^3 - \frac{27}{5}t^2 - \frac{548}{625}t - \frac{24}{625}}.$$

Remplaçant t par les valeurs de a, on trouve les valeurs de R; mais la seconde méthode est un peu plus courte.

$$U = u^6 - \frac{7}{5}u^4 + \frac{259}{625}u^2 - \frac{9}{625},$$

$$U' = u^5 - \frac{16}{15}u^3 + \frac{277}{1875}u,$$

$$\frac{U'}{\left(\frac{dU}{du}\right)} = \frac{u^4 - \frac{16}{15}u^2 + \frac{277}{1875}}{6u^4 - \frac{28}{5}u^2 + \frac{518}{625}};$$

où l'on remplace u par les valeurs de b, savoir

$$-1, \quad -\frac{3}{5}, \quad -\frac{1}{5}, \ldots,$$

On aura aussi les valeurs de R et les mêmes que par la méthode de Cotes, puisque les a forment une progression arithmétique, et l'on a

$$R = R_5 = \frac{19}{288}, \quad R_1 = R_4 = \frac{25}{90}, \quad R_2 = R_3 = \frac{25}{144} \text{ (p. 114)}.$$

Degré de précision.

Posons

$$R a^m + R_1 a_1^m + R_2 a_2^m + \ldots + R_m a_m^m = \frac{1}{m+1} - k_m,$$

k_m est la différence entre l'intégrale exacte $\int_0^1 t^m\, dt$ et l'intégrale approchée. Nous aurons, en développant en séries,

$$\frac{R}{t-a} + \frac{R_1}{t-a_1} + \frac{R_2}{t-a_2} + \ldots + \frac{R}{t-a_m}$$

$$= (1-k)\, t^{-1} + \left(\frac{1}{2} - k_1\right) t^{-2} + \left(\frac{1}{3} - k_2\right) t^{-3}$$
$$+ \left(\frac{1}{4} - k_3\right) t^{-4} - \ldots$$
$$= t^{-1} + \frac{1}{2} t^{-2} + \frac{1}{3} t^{-3} + \frac{1}{4} t^{-4} + \ldots - \Theta,$$
$$\Theta = k t^{-1} + k_1 t^{-2} + k_2 t^{-3} + k_3 t^{-4} + \ldots$$

Comme nous savons que k, k_1, k_2, ..., k_m sont nuls, on a donc

$$\Theta = k_{n+1} t^{-(n+2)} + k_{n+2} t^{-(n+3)} + k_{n+3} t^{-(n+4)} + \ldots;$$

multipliant par T, on obtient

$$T\left(\frac{R}{t-a} + \frac{R_1}{t-a_1} + \frac{R_2}{t-a^2} + \ldots + \frac{R_m}{t-a_m}\right)$$
$$= T' + T' - T\Theta \text{ (p. 121)}.$$

Le premier membre est une fonction entière de t de l'ordre n; donc le deuxième membre doit être aussi entier. Or T' est une fonction entière, donc

$$T'' = T\Theta.$$

Ainsi l'on trouve Θ en développant la fraction $\frac{T''}{T}$, et par là on détermine les coefficients k_{n+1}, k_{n+2}, etc., et si l'on développe y en puissance de t, savoir

$$y = K + K_1 t + K_2 t^2 + K_3 t^3 + \ldots,$$

on aura

$$\int y dt = k_{n+1} K_{n+1} + k_{n+2} K_{n+2} + \ldots.$$

Seconde manière d'exprimer la correction.

Soit

$$y = L + L_1 \left(t - \frac{1}{2}\right) + L_2 \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + L_3 \left(t - \frac{1}{2}\right)^3 + \ldots,$$

la correction sera

$$l_{(n+1)} L_{n+1} + l_{n+2} L_{n+2} + l_{n+3} L_{n+3} + \ldots,$$

où l_m est la correction de l'intégrale

$$\int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)^m dt,$$

et l'on a

$$l_m = k_m - \frac{1}{2} m k_{m-1} + \frac{1}{4} \cdot \frac{m.m-1}{1.2} k_{m-2}$$
$$- \frac{1}{8} \cdot \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3} k_{m-3} + \ldots.$$

Θ devient, en remplaçant t par $\frac{1}{2} u + \frac{1}{2}$,

$$2k(u^{-1} + u^{-2} + u^{-3} - u^{-4} + \ldots)$$
$$4k_1(u^{-2} + 2u^{-3} + 3u^{-4} - 4u^{-5} + \ldots)$$
$$+ 8k_2(u^{-3} - 3u^{-4} + 6u^{-5} - 10u^{-6} + \ldots)$$
$$+ \ldots$$

ou bien

$$2ku^{-1} + 4\left(k_1 - \frac{1}{2}\right)u^{-2} + 8\left(k_2 - \frac{1}{2}\cdot 2k_1 + \frac{1}{4}k\right)u^{-3}$$
$$+ 6\left(k_3 - \frac{1}{2}.3k_2 + \frac{1}{4}.3k_1 - \frac{1}{8}k\right)u^{-4},$$

ou

$$2lu^{-1} + 4l_1u^{-2} + 8l_2u^{-3} + 16l_3u^{-4} + . \quad ;$$

mais $l, l_1, l_2, \ldots, l_n$ sont nuls ; donc Θ se change en

$$2^{n+2}l_{n+1}u^{-(n+2)} + 2^{n+3}l_{n+2}u^{-(n+3)} + 2^{n+4}l_{n+3}u^{-(n+4)}.$$

Mais

$$\Theta = \frac{T''}{T}$$

et T, T$''$ se changent par la substitution de $\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}$ au lieu de t, en $\frac{U}{2^{n+1}}$ et $\frac{U''}{2^n}$ (voir ci-dessus, art. 2). Ainsi la fonction Θ devient $\frac{2U''}{U}$.

Désignant par Ω la série résultant du développement de $\frac{U''}{U}$, on a

$$\Omega = 2^{n+1}l_{n+1}u^{-(n+2)} + 2^{n+2}l_{n+2}u^{-(n+3)}$$
$$+ 2^{n+3}l_{n+3}u^{-(n+4)} + \ldots.$$

Ainsi, dans l'exemple ci-dessus,

$$U'' = -\frac{176}{13125}u^{-1} - \frac{304}{28125}u^{-3} - \frac{2576}{309375}u^{-5} + \ldots,$$
$$\Omega = -\frac{176}{13125}u^{-7} - \frac{832}{28125}u^{-9} - \frac{189856}{4296875}u^{-11} - \ldots.$$

La correction de la valeur approchée de l'intégrale est

$$-\frac{11}{525000}L_6 - \frac{13}{112500}L_8 - \frac{5933}{137500000}L_{10} - \quad .$$

Méthode d'approximation plus approchée.

Quelles que soient les valeurs de $a, a_1, a_2, \ldots, a_n$, l'approximation est toujours exacte jusqu'à l'ordre n; mais on peut choisir ces valeurs telles que l'approximation soit d'un ordre plus élevé; ainsi dans la méthode de Cotes nous avons vu que l'ordre devient $n+1$ lorsque n est pair. Généralement, si les valeurs de a sont tellement choisies, que dans T'' ou U'' des termes disparaissent au commencement de la série, alors la précision dépassera l'ordre n d'autant d'unités qu'il aura disparu de termes.

Supposons

$$T = t^{n+1} + \alpha t^n + \alpha' t^{n-1} + \alpha'' t^{n-2} + \ldots;$$

il faut donc choisir α, α', α'' de manière que dans le produit

$$T\left(t^{-1} + \frac{1}{2} t^{-2} + \frac{1}{3} t^{-3} + \frac{1}{4} t^{-4} + \ldots\right)$$

les puissances t^{-1}, t^{-2}, $t^{-3}, \ldots, t^{-(n+1)}$ disparaissent, ou bien posant

$$U = u^{n+1} + \beta u^n + \beta' u^{n+1} + \beta'' u^{n+2} + \ldots,$$

on prenne β, β', β'' de manière que dans le produit

$$U\left(u^{-1} + \frac{1}{3} u^{-3} + \frac{1}{5} u^{-5} - \frac{1}{7} u^{-} - \ldots\right)$$

les puissances u^{-1}, u^{-2}, $u^{-3}, \ldots, u^{-(n+1)}$ disparaissent.

Il est évident que cette condition ne peut être satisfaite à moins que l'on n'ait

$$\beta = 0, \quad \beta'' = 0, \quad \beta''' = 0,$$

ce qui abrége le calcul.

Soit

$$n = 0;$$

alors

$$T = t + \alpha,$$

$$(t + \alpha)\left(t^{-1} + \frac{1}{2}t^{-2} + \frac{1}{3}t^{-3} + \ldots\right).$$

Pour que t^{-1} disparaisse, on doit avoir

$$\alpha + \frac{1}{2} = 0, \quad x = -\frac{1}{2},$$

donc

$$T = t - \frac{1}{2},$$

et

$$U = u,$$

$$n = 1, \quad T = t^2 + \alpha t + \alpha',$$

$$(t^2 + \alpha t + \alpha')\left(t^{-1} + \frac{1}{2}t^{-2} - \frac{1}{3}t^{-3} + .\ .\right).$$

Pour que t^{-1} disparaisse,

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\alpha + \alpha' = 0.$$

Pour que t^{-2} disparaisse

$$-\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\alpha + \frac{1}{2}\alpha' = 0,$$

d'où

$$\alpha = -1, \quad \alpha' = \frac{1}{6}, \quad T = t^2 - t + \frac{1}{6}.$$

Pour $U = u^2 + \beta^2$.

$$(u + \beta')\left(u^{-1} + \frac{1}{3}u^{-3} + \frac{1}{5}u^{-5} + \ldots\right),$$

$$\beta' + \frac{1}{3} = 0, \quad \beta' = -\frac{1}{3}, \quad U = u^2 - \frac{1}{3},$$

$$n = 2, \quad T = t^3 + \alpha t^2 + \alpha' t + \alpha.$$

Pour que t^{-1}, t^{-2}, t^{-3} disparaissent, on a les équations

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\alpha+\frac{1}{2}\alpha'+\alpha''=0,$$
$$\frac{1}{5}+\frac{1}{4}\alpha+\frac{1}{3}\alpha'+\frac{1}{2}\alpha''=0,$$
$$\frac{1}{6}+\frac{1}{5}\alpha+\frac{1}{4}\alpha'+\frac{1}{3}\alpha''=0,$$

d'où

$$\alpha=-\frac{3}{2},\quad \alpha'=\frac{3}{5},\quad \alpha''=-\frac{1}{20}.$$

Pour U on trouve

$$\beta'=-\frac{3}{5}.$$

Méthode générale par les fractions continues.

Par la théorie des fractions continues, on trouve que la fonction U qui jouit de la propriété que

$$U\left(u^{-1}+\frac{1}{3}u^{-3}+\frac{1}{5}u^{-5}+\frac{1}{7}u^{-7}+\ldots\right)$$

donne une série qui commence par $u^{-(n+2)}$, est

$$U=u^{n+1}-\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}u^{n-1}+\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{2.4.(2n+1)(2n-1)}u^{n-3}$$
$$-\frac{(n+1)n\,n-1.n-2.n-3.n-4}{2.4.6.2n+1.2n-1.2n-3}u^{n-5}+\ldots,$$

et

$$T=t^{n+1}-\frac{(n+1)^2}{1.2n+2}t^n+\frac{(n+1)^2.n^2}{1.2.(2n+2)(2n+1)}t^{n-1}$$
$$-\frac{(n+1)^2n^2(n-1)^2}{1.2.3.2n+2\ldots 2n+1.2n}t^{n-2}+\ldots.$$

Gauss donne ces valeurs par induction et dit que la démonstration en est facile.

Prochainement cette méthode et une application numérique (*).

(*) Voir pour la première démonstration, Prouhet (*N. A.*, t. I, p. 348).