

BRIOSCHI

Méthode pour déterminer les racines communes à deux équations

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 14 (1855), p. 81-83

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1855_1_14__81_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1855, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

MÉTHODE POUR DÉTERMINER LES RACINES COMMUNES A DEUX ÉQUATIONS;

PAR M. BRIOSCHI,

Professeur à l'Université de Pavie

Soient

$$(1) \begin{cases} f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0, \\ \varphi(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_{m-1} x + b_m = 0, \end{cases}$$

les deux équations; $x_1, x_2, \dots, x_n$ les racines de la première supposées inégales, et

$$(2) \quad V = \varphi(x_1) \varphi(x_2) \dots \varphi(x_n).$$

Supposons que les équations (1) aient r (et seulement r) racines communes, on a la proposition suivante :

THÉORÈME. *Les r racines communes aux deux équations (1) sont les racines de l'équation suivante,*

$$\frac{d^r V}{db_m^r} x^r - r \frac{d^r V}{db_m^{r-1} db_{m-1}} x^{r-1} + \frac{r(r-1)}{2} \frac{d^r V}{db_m^{r-2} db_{m-1}^2} x^{r-2} - \dots \\ - (-1)^r r \frac{d^r V}{db_m db_{m-1}^{r-1}} x + (-1)^r \frac{d^r V}{db_{m-1}^r} = 0,$$

ou de la suivante,

$$\frac{d^r V}{da_n^r} x^r - r \frac{d^r V}{da_n^{r-1} da_{n-1}} x^{r-1} + \dots \\ - (-1)^r r \frac{d^r V}{da_n da_{n-1}^{r-1}} x + (-1)^r \frac{d^r V}{da_{n-1}^r} = 0.$$

En effet, de l'équation (2) on déduit

$$(3) \left\{ \begin{array}{l} \frac{dV}{db_{s_1}} = x_1^{r_1} V_1 + x_2^{r_2} V_2 + \dots + x_n^{r_n} V_n, \\ \frac{d^2 V}{db_{s_1} db_{s_2}} = (x_1^{r_1} x_2^{r_2} + x_1^{r_2} x_2^{r_1}) V_{1,2} + (x_1^{r_1} x_3^{r_3} + x_1^{r_3} x_3^{r_1}) V_{1,3} + \dots \\ \frac{d^3 V}{db_{s_1} db_{s_2} db_{s_3}} = \left\{ \begin{array}{l} x_3^{r_3} (x_1^{r_1} x_2^{r_2} + x_1^{r_2} x_2^{r_1}) + x_2^{r_2} (x_1^{r_1} x_3^{r_3} + x_1^{r_3} x_3^{r_1}) \end{array} \right\} V_{1,2,3} + \\ \quad + x_1^{r_1} (x_2^{r_2} x_3^{r_3} + x_2^{r_3} x_3^{r_2}) \end{array} \right\}$$

et ainsi de suite. On a posé

$$V_1 = \frac{V}{\varphi(x_1)}, \quad V_{1,2} = \frac{V_1}{\varphi(x_2)}, \\ V_{1,2,3} = \frac{V_{1,2}}{\varphi(x_3)} \dots \quad r_1 = m - s_1, \quad r_2 = m - s_2, \dots$$

Si les équations (1) ont une seule racine commune, par exemple x_1 , la première des équations (3) donne

$$\frac{dV}{db_{s_1}} = x_1^{r_1} V_1$$

et, par conséquent,

$$\frac{dV}{db_m} x_1 - \frac{dV}{db_{m-1}} = 0,$$

résultat déjà obtenu par M. Richelot.

Si les équations (1) ont deux seules racines x_1, x_2 communes, la seconde des équations (3) donne

$$\frac{d^2 V}{db_{s_1} db_{s_2}} = (x_1' x_2' + x_1' x_2') V_{1,2},$$

de laquelle

$$\begin{aligned} \frac{d^2 V}{db_n^2} &= 2 V_{1,1}, & \frac{d^2 V}{db_m db_{m-1}} &= (x_1 + x_2) V_{1,2}, \\ \frac{d^2 V}{db_{m-1}^2} &= 2 x_1 x_2 V_{1,2}, \end{aligned}$$

et les x_1, x_2 seront les racines de l'équation

$$\frac{d^2 V}{db_m^2} x^2 - 2 \frac{d^2 V}{db_m db_{m-1}} x + \frac{d^2 V}{db_{m-1}^2} = 0.$$

De même, si les équations (1) ont trois seules racines communes x_1, x_2, x_3 , de la troisième équation (3), on a

$$\begin{aligned} \frac{d^3 V}{db_m^3} &= 6 V_{1,2,3}, & \frac{d^3 V}{db_m^2 db_{m-1}} &= 2 (x_1 + x_2 + x_3) V_{1,2,3}, \\ \frac{d^3 V}{db db_m^2} &= 2 (x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3) V_{1,2,3}, & \frac{d^3 V}{db_{m-1}^3} &= x_1 x_2 x_3 V_{1,2,3}, \end{aligned}$$

et en conséquence les trois racines communes seront les racines de l'équation

$$\frac{d^3 V}{db_m^3} x^3 - 3 \frac{d^3 V}{db_m^2 db_{m-1}} x^2 + 3 \frac{d^3 V}{db_m db_{m-1}^2} x - \frac{d^3 V}{db_{m-1}^3} = 0.$$

Le théorème se trouve ainsi démontré par analogie (*).

(*) M. Brioschi a trouvé depuis une démonstration rigoureuse.