

PAINVIN

Solution de la question 300

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 14
(1855), p. 254-257

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1855_1_14__254_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1855, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DE LA QUESTION 500

(voir page 137),

PAR M. PAINVIN,

Docteur ès Sciences mathématiques.

Trouver une fonction de a, b, c, d , telle, qu'en y faisant $b = a$, elle devienne $\frac{c-d}{2(c+d)}$, et en y faisant $c = d$, elle devienne $\frac{a-b}{2(a+b)}$.

Soit $f(a, b, c, d)$ la fonction cherchée; posons

$$x = \frac{a-b}{2(a+b)}, \quad y = \frac{c-d}{2(c+d)},$$

d'où

$$a = b \frac{1+2x}{1-2x}, \quad c = d \frac{1+2y}{1-2y},$$

alors

$$f(a, b, c, d) = f\left(b \frac{1+2x}{1-2x}, b, d \frac{1+2y}{1-2x}, d\right) \\ = F(x, y, b, d).$$

Il s'agit de déterminer F par la condition que pour $x = 0$ elle devienne y et pour $y = 0$ elle devienne x .

$$(1) \quad F(x, y, b, d) = \begin{cases} x \left(\frac{dF}{dx}\right)_0 + y \left(\frac{dF}{dy}\right)_0 + \frac{x^2}{1.2} \left(\frac{d^2F}{dx^2}\right)_0 \\ + xy \left(\frac{d^2F}{dx dy}\right)_0 + \frac{y^2}{1.2} \left(\frac{d^2F}{dy^2}\right)_0 + \dots \\ + (F)_0 + b \left(\frac{dF}{db}\right)_0 + d \left(\frac{dF}{dd}\right)_0 \\ + \frac{b^2}{1.2} \left(\frac{d^2F}{db^2}\right)_0 + bd \left(\frac{d^2F}{db dd}\right)_0 \\ + \frac{d^2}{1.2} \left(\frac{d^2F}{dd^2}\right)_0 + \dots; \end{cases}$$

()₀ indiquant qu'on a fait, dans la fonction renfermée, entre parenthèses,

$$x = 0, \quad y = 0, \quad b = 0, \quad d = 0,$$

Pour $y = 0$, $F(x, y, b, d)$ doit devenir x ; introduisons cette hypothèse dans l'identité (1), on devra avoir encore une identité en y , ce qui fournira les conditions :

$$(2) \quad (F_0) + b \left(\frac{dF}{db}\right)_0 + d \left(\frac{dF}{dd}\right)_0 + \frac{b^2}{1.2} \left(\frac{d^2F}{db^2}\right)_0 + \dots = 0,$$

$$(3) \quad \begin{cases} \left(\frac{dF}{dx}\right)_0 = 1, & \left(\frac{d^2F}{dx^2}\right)_0 = 0, \\ \left(\frac{d^3F}{dx^3}\right)_0 = 0, \dots, & \left(\frac{d^p F}{dx^p}\right)_0 = 0, \dots \end{cases}$$

Pour $x = 0$, $F(x, y, b, d)$ doit se réduire à y , ce qui

fournira les nouvelles conditions

$$(4) \quad \begin{cases} \left(\frac{dF}{dy}\right)_0 = 1, & \left(\frac{d^2F}{dy^2}\right)_0 = 0, \\ \left(\frac{d^3F}{dy^3}\right)_0 = 0, \dots, & \left(\frac{d^pF}{dy^p}\right)_0 = 0, \dots \end{cases}$$

Remarquons que l'équation (2) exprime que

$$F(0, 0, b, d) = 0,$$

c'est-à-dire que $F(x, y, b, d)$ se réduit à zéro lorsqu'on y fait à la fois $x = 0$ et $y = 0$, ou bien que $F(a, b, c, d)$ se réduit à zéro lorsqu'on y fait à la fois $a = b$ et $c = d$.

En vertu de ces relations $F(x, y, b, d)$ prendra la forme

$$(5) \quad \begin{cases} F(x, y, b, d) = x + y \\ + xy \left[\left(\frac{d^2F}{dx dy}\right)_0 + \frac{x}{1.2} \left(\frac{d^3F}{dx^2 dy}\right)_0 + \frac{y}{1.2} \left(\frac{d^3F}{dx dy^2}\right)_0 + \dots \right]. \end{cases}$$

Or, dans tous les termes renfermés dans cette parenthèse, on a

$$b = 0, \quad d = 0,$$

et, par suite,

$$a = 0, \quad c = 0,$$

puisque x et y sont quelconques. De plus, les coefficients des différentes puissances de x et y ne sont assujettis à aucune condition, et sont, par conséquent, entièrement arbitraires; donc l'expression entre parenthèses est une fonction arbitraire des seules variables x et y qui se réduit à $\left(\frac{d^2F}{dx dy}\right)_0$ pour $x = 0$ et $y = 0$.

$$F(x, y, b, d) = x + y + xy\varphi(x, y),$$

φ étant une fonction arbitraire de x et y , satisfait donc à toutes les conditions de la condition; il est d'ailleurs facile de le vérifier.

Par conséquent,

$$f(a, b, c, d) = \frac{a-b}{2(a+b)} + \frac{c-d}{2(c+d)} + \frac{(a-b)(c-d)}{4(a+b)(c+d)} \varphi$$

est la fonction la plus générale qui satisfasse à la question. Il est bien évident que nous pouvons prendre pour φ une fonction arbitraire de a, b, c, d en l'assujettissant à la seule condition de ne pas devenir infinie lorsqu'on y fait $a = b$ ou $c = d$; condition nécessaire pour pouvoir employer le développement (1) et qui d'ailleurs était imposée par l'énoncé même de la question.

On a donc définitivement

$$f = \frac{ac - bd + (a-b)(c-d)M}{(a+b)(c+d)},$$

M étant une fonction quelconque de a, b, c, d .

Note du Rédacteur. Dans une lettre à Huyghens, Leibnitz pose la question et donne pour solution

$$\frac{ac - bd}{(a+b)(c+d)};$$

cas particulier (*).