

FAURE

Note sur les valeurs que prennent les racines des équations du 3^e et 4^e degré lorsque le coefficient du premier terme est nul (voir tome IV, p. 382)

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 14 (1855), p. 194-197

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1855_1_14__194_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1855, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

NOTE

Sur les valeurs que prennent les racines des équations du 3^e et 4^e degré
lorsque le coefficient du premier terme est nul

(voir tome IV, p. 382);

PAR M. FAURE,

Officier d'artillerie.

La méthode que j'indique ici est celle que l'on suit ordinairement pour le second degré. Je suppose que le lecteur a sous les yeux l'article d'Eisenstein où il traite de la résolution générale des équations des quatre premiers degrés (tome VIII, page 110).

1. L'équation générale du troisième degré

$$ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0$$

donne

$$x = \frac{1}{a}[-b + \psi(\alpha) + \psi(\beta)],$$

$$x = \frac{1}{a}[-b + \rho\psi(\alpha) + \rho^2\psi(\beta)],$$

$$x = \frac{1}{a}[-b + \rho^2\psi(\alpha) + \rho\psi(\beta)].$$

On a d'ailleurs, d'après l'article cité,

$$\alpha = -b^3 + \frac{1}{2}a[\varphi(c) - ad + 3bc];$$

(195)

nous écrirons simplement

$$\alpha = -b^3 + k;$$

k contient ainsi α en facteur. On aura alors

$$\psi(\alpha) = -b + \frac{k}{3b^2} + \dots,$$

en ne prenant que les deux premiers termes de la racine cubique de α , tous les autres termes contenant au moins le facteur α^2 .

On a de même

$$\psi(\beta) = -b + \frac{k'}{3b^2} + \dots$$

Remplaçant dans les expressions de x , on trouve

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{a} \left[-3b + \frac{k+k'}{3b^2} + \dots \right], \\ x &= \frac{1}{a} \left[-b(1+\rho+\rho^2) + \frac{1}{3b^2}(k\rho+k'\rho^2) + \dots \right], \\ x &= \frac{1}{a} \left[-b(1+\rho+\rho^2) + \frac{1}{3b^2}(k\rho^2+k'\rho) + \dots \right]: \end{aligned}$$

ayant égard à la valeur de ρ , qui est l'une des racines cubiques imaginaires de l'unité, supprimant le facteur a et faisant ensuite $a=0$, on trouve facilement que les valeurs précédentes se réduisent à

$$\begin{aligned} x &= \infty, \\ x &= \frac{1}{6b} [-3c + \varphi(9c^2 - 12bd)], \\ x &= \frac{1}{6b} [-3c - \varphi(9c^2 - 12bd)]; \end{aligned}$$

les deux dernières sont les racines de l'équation du second degré,

$$3bx^2 + 3cx + d = 0.$$

2. Je prends maintenant l'équation générale du qua-

trième degré

$$ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e = 0;$$

elle donne

$$x = \frac{1}{a} [-b + \varphi(\gamma) + \varphi(\delta) + \varphi(\varepsilon)],$$

$$x = \frac{1}{a} [-b + \varphi(\gamma) - \varphi(\delta) - \varphi(\varepsilon)],$$

$$x = \frac{1}{a} [-b - \varphi(\gamma) + \varphi(\delta) - \varphi(\varepsilon)],$$

$$x = \frac{1}{a} [-b - \varphi(\gamma) - \varphi(\delta) + \varphi(\varepsilon)],$$

avec

$$\gamma = b^2 - ac + \frac{1}{2}a[\varphi(\zeta) + \psi(\eta)] = b^2 - ac + k,$$

$$\delta = b^2 - ac + \frac{1}{2}a[\rho\varphi(\zeta) + \rho^2\psi(\eta)] = b^2 - ac + k',$$

$$\varepsilon = b^2 - ac + \frac{1}{2}a[\rho^2\varphi(\zeta) + \rho\varphi(\eta)] = b^2 - ac + k''.$$

Je prends les racines carrées de ces quantités et je remarque que le produit $\varphi(\gamma)\varphi(\delta)\varphi(\varepsilon)$ devant être égal à

$$-b^3 - \frac{1}{2}a^2d + \frac{3}{2}abc,$$

il est nécessaire de prendre pour deux des radicaux $\varphi(\gamma)$ et $\varphi(\varepsilon)$, par exemple, le signe + et le signe contraire pour $\varphi(\delta)$. De là

$$\varphi(\gamma) = b + \frac{1}{2b}(k - ac + \dots),$$

$$\varphi(\delta) = b + \frac{1}{2b}(k' - ac + \dots),$$

$$\varphi(\varepsilon) = -b - \frac{1}{2b}(k'' - ac + \dots).$$

Les termes omis contiennent au moins le facteur a^2 . On

a donc, pour la première des valeurs de x ,

$$x = \frac{1}{a} \left[\frac{1}{2b} (k + k' - k'' - ac) + \dots \right];$$

mais

$$\begin{aligned} k + k' - k'' &= \frac{1}{2} a [\psi(\zeta)(1 + \rho - \rho^2) + \psi(\eta)(1 - \rho + \rho^2)] \\ &= -a [\rho^2 \psi(\zeta) + \rho \psi(\eta)], \end{aligned}$$

d'où, en supprimant un facteur a et faisant ensuite $a = 0$,

$$x = \frac{1}{2b} - c - \rho^2 \psi(\zeta_0) - \rho \psi(\eta_0),$$

en indiquant par ζ_0 et η_0 ce que deviennent ζ et η lorsqu'on y fait $a = 0$.

On trouve de même, pour les trois autres valeurs,

$$x = \frac{1}{2b} [-c - \rho \varphi(\zeta_0) - \rho^2 \varphi(\eta_0)],$$

$$x = \frac{1}{2b} [-c - \psi(\zeta_0) - \psi(\eta_0)],$$

$$x = \infty.$$

Les trois premières valeurs sont les racines de l'équation du troisième degré

$$4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e = 0,$$

car, d'après l'article d'Eisenstein, on a

$$\zeta_0 = \frac{9E_0 + \varphi(3F_0)}{9}, \quad \eta_0 = \frac{9E_0 - \varphi(3F_0)}{9},$$

$$E_0 = b^2e - 2bcd + c^3,$$

$$F_0 = 9b^2(3b^2e^2 - 4c^2d^2 - 12bcde + 6e^3e^3) + 64b^3d^3$$