NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. GAUCHEREL

Note sur les erreurs relatives et absolues

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 14 (1855), p. 145-150

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1855_1_14__145_1>

NOTE SUR LES ERREURS RELATIVES ET ABSOLUES;

PAR M. E. GAUCHEREL,
Capitaine,
Sous-directeur des études à l'École impériale spéciale Militaire.

M. Vieille dit (*Théorie générale des approximations*, Avertissement) : « Il m'a semblé que dans les Traités » d'Arithmétique on s'était attaché trop exclusivement à » l'*erreur absolue*, sans tenir compte de l'*erreur relative*.... » Il est bien certain qu'on a tort de s'attacher trop exclusivement à l'erreur absolue, mais je crains que M. Vieille n'ait quelquefois le tort contraire de chercher l'erreur relative, lorsque l'erreur absolue serait plus importante à étudier.

Je ne citerai ici pour exemple que la question relative à la recherche des triangles les plus avantageux pour la mesure des hauteurs. Je traiterai plus tard la même question sur les triangles géodésiques.

Si j'avais à déterminer les hauteurs de divers édifices, je m'imposerais une même limite d'erreur absolue pour tous ces édifices, plutôt que d'adopter une limite d'er-

(*) Les quatre solutions pouvant devenir imaginaires, cette réduction ne me semble pas possible, à moins qu'il n'y ait deux racines égales, ce qui est invraisemblable. TM.

reur relative. Ainsi je chercherais à obtenir les hauteurs à un centimètre près, par exemple, et non à $\frac{1}{5000}$ ou à $\frac{1}{10000}$ près de la hauteur.

Le développement de cette question est intéressant au point de vue de la pratique et instructif comme discussion; les applications numériques sont des exercices de calcul d'une grande utilité, dans lesquels les approximations jouent un grand rôle: essayons de donner une solution plus complète que celle de M. Vieille.

1°. Pour obtenir la hauteur AB d'un édifice, on mesure sur un terrain horizontal une base $AC = b$ et l'angle

$$ACB = C.$$

On a

$$AB = AC \operatorname{tang} C.$$

Mais, si l'angle C comporte une erreur $BCD = \alpha$, quelle est l'erreur $e = BD$ que comporte la mesure de la hauteur $h = AB$?

On a dans le triangle BCD,

$$e = \frac{BC \cdot \sin\alpha}{\sin(B - \alpha)} = \frac{BC \cdot \sin\alpha}{\cos(C + \alpha)};$$

dans le triangle ABC, on a

$$BC = \frac{h}{\sin C};$$

donc

$$e = \frac{h \sin\alpha}{\sin C \cos(C + \alpha)}.$$

L'erreur α pouvant être négligée devant C, on a

$$e = \frac{h \sin\alpha}{\sin C \cos C} = \frac{2h \sin\alpha}{\sin 2C} \ (*).$$

(*) Ce résultat a déjà été obtenu par M. Lecointe (t. IV, p. 581).

Application. Soient

$$h = 50^{\text{m}}, \quad \alpha = 1' \quad \text{(division centésimale)}, \quad C = 30^{\text{g}},$$

on a

$$\sin 1' = \frac{\pi}{20000} = 0{,}000157,$$

d'où

$$e = 0^{\text{m}},019.$$

La hauteur h est obtenue à 2 centimètres près.

2°. Pour une même valeur de h et de α, le minimum de l'expression

$$e = \frac{2h \sin \alpha}{\sin 2C}$$

a évidemment lieu pour $C = 50^{\text{g}}$. Donc, pour mesurer le plus exactement possible une hauteur h, il faut prendre une base à peu près égale à la hauteur à mesurer.

3°. Posant

$$C = 50^{\text{g}},$$

il vient

$$e = 2h \sin \alpha,$$

relation qui indique qu'à des limites de e et de α correspondent des limites pour la valeur de h.

Application. Si les hauteurs doivent être obtenues à un centimètre près avec un éclimètre donnant une approximation d'une minute, la limite de h est

$$h = \frac{e}{2 \sin \alpha} = \frac{0^{\text{m}},01}{0{,}000314} = 32^{\text{m}}.$$

Donc, avec un tel goniomètre, on peut obtenir les hauteurs plus petites que 30 mètres avec une approximation d'un centimètre, en les observant sous un angle de 50 grades.

4°. On peut demander quelle approximation on doit obtenir dans la mesure de l'angle, pour avoir la hauteur à un centimètre près. On pose

$$\sin\alpha = \frac{e}{2h}.$$

Application. Soient

$$e = 0^{m},01, \quad h = 50^{m}, \quad \sin\alpha = \frac{0,01}{100}, \quad \alpha = 0',63''.$$

L'approximation angulaire doit donc être d'une demi-minute environ.

5°. On ne peut pas toujours se placer de manière à voir la hauteur à mesurer sous un angle à peu près égal à 50 grades. Il faut alors trouver la limite des valeurs de C pour lesquelles l'erreur sur la valeur de h est plus petite que la limite imposée. Cette limite est donnée par l'expression

$$\sin 2C > \frac{2h\sin\alpha}{e}.$$

Application. Soient

$$h = 25^{m}, \quad \alpha = 1', \quad e = 0^{m},01;$$

on a

$$\sin 2C > 0,785,$$

d'où l'on conclut que l'angle 2C doit être compris entre 60 et 140 grades, et l'angle C entre 30 et 70 grades.

Il n'est pas sans intérêt d'ajouter quelques considérations géométriques d'une grande simplicité sur la même question.

L'erreur linéaire qui résulte de l'erreur angulaire BCD étant BD, les trois points B, D, C sont sur une circonférence tangente à la ligne BM, faisant l'angle MBD = BCD. Cette circonférence coupe généralement l'horizontale AC en un autre point C'. Tout autre point C'' situé sur AC, en dehors des points C et C', donne une erreur plus grande que BD. En effet, la ligne C″ D″, parallèle à FD, donne évidemment BD″ > BD.

Il suit de là que, si l'on conçoit une circonférence tangente en B à la ligne MB, et tangente à AC, le point de contact C sur cette dernière ligne est le point pour lequel l'erreur angulaire MBD donne la plus petite erreur linéaire. Si cette erreur linéaire est très-petite, on peut considérer la circonférence comme tangente aux deux lignes AC, AB; on a alors AC = AB, ce qui conduit au principe énoncé ci-dessus (*).

Enfin, je ferai ressortir en terminant combien il est évident que l'erreur relative n'aurait aucune signification, s'il s'agissait de déterminer les cotes de hauteur de différents points d'un terrain.

Dans les opérations de nivellement, je ne considérerai donc que l'erreur absolue.

On a

$$e = \frac{\mathrm{BC}\sin\alpha}{\cos(\mathrm{C}+\alpha)}:$$

mais

$$\mathrm{BC} = \frac{\mathrm{AC}}{\cos \mathrm{C}};$$

donc

$$e = \frac{b\sin\alpha}{\cos \mathrm{C}\cos(\mathrm{C}+\alpha)};$$

et, en négligeant α devant C,

$$e = \frac{b\sin\alpha}{\cos^2 \mathrm{C}}.$$

(*) On ne peut faire intervenir, dans cette question, la considération de l'erreur relative que pour faire comprendre que, toutes choses égales d'ailleurs, il faut apporter plus de soin dans les opérations quand on veut que la mesure d'une grande ligne comporte la même erreur absolue que celle d'une petite.

On peut répéter sur cette expression une discussion analogue à celle qui a été faite ci-dessus, mais je me contenterai d'établir ici que, dans les nivellements *topographiques*, on se contente généralement de déterminer les différences de niveau à un décimètre près; que les éclimètres donnent les angles à 2 minutes près, au moins, et que les angles à l'horizon sont rarement plus grands que 15 grades.

Si l'on veut chercher la limite de b qui correspond à ces nombres, on a

$$b = \frac{e \cos^2 C}{\sin \alpha};$$

substituant, il vient

$$b = 301^m,02.$$

Enfin, le tableau suivant donne les valeurs de e correspondantes à

$$\alpha = 1', \quad b = 100^m,$$

et à différentes valeurs de C,

$$C = 5^g \ldots e = 0^m,0158,$$
$$C = 10^g \ldots e = 0^m,0161,$$
$$C = 15^g \ldots e = 0^m,0166,$$
$$C = 20^g \ldots e = 0^m,0173.$$

La valeur de e étant proportionnelle à α et à b, on déduit facilement de ce tableau les erreurs que comportent les opérations faites dans des circonstances différentes.

Application. Soient

$$\alpha = 2', \quad b = 450^m, \quad C = 12^g;$$

on a

$$e = 2 \times 45 \times 0^m,0163 = 0^m,148.$$