

Théorèmes d'Eisenstein

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 14
(1855), p. 133-137

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1855_1_14__133_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1855, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

(CRELLE, tome XLIV, page 261; 1852.)

$$S = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \dots \\ a_2 & b_2 & c_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n+1} & b_{n+1} & c_{n+1} & \dots \end{vmatrix}$$

Soit un système d'équations

$$\begin{array}{rcccccl} a_1 u_1 & + & b_1 u_2 & + & c_1 u_3 & + \dots & = & \gamma_1, \\ a_2 u_1 & + & b_2 u_2 & + & c_2 u_3 & + \dots & = & \gamma_2, \\ \dots & & \dots & & \dots & & & \\ a_{n+1} u_1 & + & b_{n+1} u_2 & + & c_{n+1} u_3 & + \dots & = & \gamma_{n+1}, \end{array}$$

$$\begin{aligned} u_1 &= \alpha_1 \gamma_1 + \alpha_2 \gamma_2 + \alpha_3 \gamma_3 + \dots, \\ u_2 &= \beta_1 \gamma_1 + \alpha_2 \gamma_2 + \beta_3 \gamma_3 + \dots, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Soit

$$S_1 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \dots \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \dots \end{vmatrix}$$

on a

$$S_1 S = I,$$

et

[illegible]

ou bien symboliquement

$$\sum a_{\alpha} = 1, \quad \sum a_{\beta} = 0,$$

c'est-à-dire lorsque les lettres latines sont jointes aux lettres grecques correspondantes, la somme est égale à 1, et si les lettres ne sont pas correspondantes, la somme est nulle.

2. THÉORÈME. Soit

$$\begin{aligned} p_\mu &= a_\mu + A_1 b_\mu x + A_2 c_\mu x^2 + A_3 d_\mu x^3 + \dots, \\ \omega_\mu &= \alpha_\mu + A_1 \beta_\mu \xi + A_2 \gamma_\mu \xi^2 + A_3 \delta_\mu \xi^3 + \dots; \end{aligned}$$

si l'on donne à μ les valeurs successives de la suite $1, 2, 3, \dots, n+1$, les $a, b, c, \dots, \alpha, \beta, \gamma$ ayant même signification que ci-dessus, et les A étant des quantités quelconques, on a

$$\sum p^\mu = p_1 \mu_1 + p_2 \mu_2 + \dots p_{n+1} \mu_{n+1} = \text{fonction de } x\xi.$$

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du système d'équations (1).

Corollaire. Si A_μ^2 est le coefficient binominal de z^μ dans $(1+z)^n$, on a

$$\sum p_\mu = (1+x\xi)^n.$$

Ainsi le produit de $n+1$ fonctions, chacune de degré n , se réduit ici à une fonction de degré $2n$ et de degré n par rapport à chaque variable.

Application. Si l'on a $n=2$,

$$p_1\omega_1 + p_2\omega_2 + p_3\omega_3 = (1+x\xi)^2;$$

posant

$$p_1\omega_1 + p_2\omega_2 = 0,$$

alors

$$p_3\omega_3 = (1+x\xi)^2.$$

x et ξ ne sont plus des variables indépendantes, et l'on a

$$p_2 = \frac{-\omega_1 p_1}{\omega_2},$$

$$p_2 p_3 = \frac{-\omega_1 p_1 p_3 \omega_3}{\omega_2 \omega_3},$$

$$p_1 p_2 p_3 = \frac{-\omega_1 p_1^2 p_3 \omega_3}{\omega_2 \omega_3} = \frac{-\omega_1 \omega_2 \omega_3 p_1^2 (1+x\xi)^2}{\omega_2^2 \omega_3^2};$$

d'où

$$\sqrt{p_1 p_2 p_3} = \sqrt{-\omega_1 \omega_2 \omega_3} \cdot \frac{p_1 (1+x\xi)}{\omega_2 \omega_3}.$$

De là ce théorème :

La racine carrée d'une fonction rationnelle en x du sixième degré peut être transformée rationnellement dans la racine carrée d'une fonction similaire d'une autre variable.

Eisenstein applique ce théorème à la transformation des intégrales abéliennes de première classe; travail qui vient d'être considérablement perfectionné et étendu par

M. Hermite dans une suite de Mémoires insérés dans les *Comptes rendus*, et qui renferment de précieuses et profondes recherches sur les déterminants, dont nous espérons pouvoir entretenir nos lecteurs. (*Comptes rendus*, 1855, 1^{er} semestre, pages 246, 304, 365, 427, 485 et 536.)

Voici la marche d'Eisenstein :

$$p_1 \omega_1 + p_2 \omega_2 = F(x, \xi) = (1 + x\xi)^2 - p_3 \omega_3 = \theta^2 - p_3 \omega_3, \\ \theta = 1 + x\xi;$$

$$d_\xi F = 2\theta \left(\frac{d\theta}{d\xi} \right) - p_3 \frac{d\omega}{d\xi} = 2\theta \left(\frac{d\theta}{d\xi} \right) - \frac{\theta^2}{\omega_3} \frac{d\omega}{d\xi},$$

$$d_\xi F = \frac{\theta}{\omega_3} \left[2\omega_3 \left(\frac{d\theta}{d\xi} \right) - \theta \frac{d\omega_3}{d\xi} \right] = - \frac{\theta}{\omega_3} \Theta;$$

$$\Theta = - 2\omega_3 \left(\frac{d\theta}{d\xi} \right) + \theta \frac{d\omega_3}{d\xi},$$

or

$$dx = \frac{- d_\xi F \cdot d\xi}{d_x F} = \frac{\theta \Theta}{\omega_3 d_x F} d\xi;$$

mais

$$\sqrt{p_1 p_2 p_3} = \sqrt{-\omega_1 \omega_2 \omega_3} \frac{p_1 \theta}{\omega_2 \omega_3};$$

donc

$$\frac{dx}{\sqrt{p_1 p_2 p_3}} = \frac{d\xi}{\sqrt{-\omega_1 \omega_2 \omega_3}} \frac{\Theta \omega_2}{d_x F \cdot p_1}.$$

Faisons

$$p_1 = (x - r)(x - s),$$

r et s sont des quantités connues; il vient

$$\frac{(x - s) dx}{\sqrt{p_1 p_2 p_3}} = \frac{d\xi}{\sqrt{-\omega_1 \omega_2 \omega_3}} \omega_2 \cdot \frac{\Theta}{d_x F \cdot (x - s)}.$$

Entre x et ξ existe la relation quadratique

$$p_1 \omega_1 + p_2 \omega_2 = 0, \quad \text{ou} \quad F(x, \xi) = 0.$$

Ainsi x est une fonction de ξ , et x a deux valeurs en ξ .
Mettant successivement ces deux valeurs et sommant,
on a

$$\sum \frac{(x-s) dx}{\sqrt{p_1 p_2 p_3}} = \frac{d\xi}{\sqrt{-\omega_1 \omega_2 \omega_3}} \omega_2 \sum \frac{\Theta}{d_x F(x-s)}.$$

Mais Θ est du premier degré en x , et F est du second degré; on a donc, d'après la théorie de la décomposition en fractions partielles,

$$\sum \frac{\Theta}{d_x F(x-r)} = \frac{\Theta(r, \xi)}{F(r, \xi)}.$$

Dans Θ et F on a remplacé x par r ; mais

$$F(r, \xi) = \omega_2 p_2(r),$$

où $p_2(r)$ est la valeur de p_2 dans laquelle x est remplacé par r ; par conséquent $p_2(r)$ est une constante. On a donc

$$\sum \frac{(x-s) dx}{\sqrt{p_1 p_2 p_3}} = \frac{\Theta(r, \xi) d\xi}{p_2(r) \sqrt{-\omega_1 \omega_2 \omega_3}},$$

et de même

$$\sum \frac{(x-r) dx}{\sqrt{p_1 p_2 p_3}} = \frac{\Theta(r, \xi) d\xi}{p_2(s) \sqrt{-\omega_1 \omega_2 \omega_3}};$$

mais

$$\theta(x, \xi) = \beta_3 \sqrt{2} (1 - x\xi) + 2\gamma_3 \xi - 2\alpha_3 x.$$

Ainsi $\theta(r, \xi)$ est du premier degré en ξ , donc les membres à droite de ces équations sont des différentielles d'intégrales abéliennes.
