Nouvelles annales de mathématiques

James Booth

Rectification et quadrature d'une ellipse sphérique

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 13 (1854), p. 94-113

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1854_1_13__94_1>

RECTIFICATION ET QUADRATURE D'UNE ELLIPSE SPHÉRIQUE ;

PAR LE RÉV. JAMES BOOTH,
Professeur au Collége de Liverpool.

(Philosophical Magazine, t. XXV, p. 18; 1844.)

---

1. THÉORÈME. A $=$ *aire d'une surface sphérique terminée par une courbe.*

$$(1) \qquad A = \int_0^{2\pi} d\omega \int_0^{\rho} ds . \sin \sigma .$$

$\sigma =$ arc de grand cercle, depuis un point fixe P appelé pôle, et un point variable s pris dans l'intérieur de l'aire.

$\rho =$ rayon sphérique de la courbe passant par le pôle P et le point S de la courbe.

$\omega =$ angle que le plan du grand cercle Ps fait avec un plan fixe de grand cercle *fixe* passant par P.

Intégrant, ou par rapport à σ, on obtient

$$(2)\qquad A = \int_0^{2\pi} d\omega [1 - \cos\rho].$$

2. Théorème. *s et s' étant deux points de la courbe, ρ_0, ρ_1 les deux rayons correspondants, on a pour la longueur de l'arc ss',*

$$(3)\qquad \text{arc } ss' = \int_{\rho^0}^{\rho'} d\rho \left[1 + \left(\sin\rho \frac{d\omega}{d\rho}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

3. L'équation de l'ellipse sphérique est

$$(4)\qquad \frac{\cos^2\omega}{\tang^2\alpha} + \frac{\sin^2\omega}{\tang^2\beta} = \frac{1}{\tang^2\rho},$$

ou bien

$$(5)\qquad \frac{\cos^2\omega}{\sin^2\alpha} + \frac{\sin^2\omega}{\sin^2\beta} = \frac{1}{\sin^2\rho};$$

2α est le graud axe de l'ellipse, angle maximum du cône au sommet..... }
2β est le petit axe de l'ellipse, angle minimum du cône au sommet...... } (centre de la sphère).

4. Les équations (4) et (5) donnent

$$(6)\qquad \cos\rho = \cos\alpha \frac{\sqrt{1 + \frac{\tang^2\alpha}{\tang^2\beta}\tang^2\omega}}{\sqrt{1 + \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\beta}\tang^2\omega}}.$$

Substituant cette valeur dans l'équation (2), et intégrant, on obtient

$$(7)\qquad A = \frac{\pi}{2} - \cos\alpha \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega. \frac{\sqrt{1 + \frac{\tang^2\alpha}{\tang^2\beta}\tang^2\omega}}{\sqrt{1 + \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\beta}\tang^2\omega}},$$

où A est le quart de l'aire sphérico-elliptique; faisons

$$(8) \qquad \operatorname{tang} \omega = \frac{\operatorname{tang} \beta}{\operatorname{tang} \alpha} \operatorname{tang} \varphi,$$

$$(9) \qquad \frac{d\omega}{d\varphi} = \frac{\operatorname{tang} \alpha \operatorname{tang} \beta}{\operatorname{tang}^2 \alpha \cos^2 \varphi + \operatorname{tang}^2 \beta \sin \varphi};$$

d'où

$$(10) \quad A = \frac{\pi}{2} - \frac{\operatorname{tang} \alpha}{\operatorname{tang} \beta} \cos \alpha \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left\{ \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{\sin^2\alpha - \sin^2\beta}{\sin^2\alpha \cos^2\beta}\right) \sin^2\varphi\right] \sqrt{1 - \left(\frac{\sin^2\alpha - \sin^2\beta}{\cos^2\beta}\right) \sin^2\varphi}} \right\}.$$

Prenons le plan de l'angle 2α renfermant l'axe *moyen* du cône, pour plan des xz, et le plan de l'angle 2β renfermant l'axe minimum du cône, pour plan des yz.

L'axe réel du cône est pris pour axe des z qui coupe la sphère au pôle P.

Menons par le sommet du cône, et dans le plan xz, deux droites faisant, avec l'axe *moyen* ou réel du cône, des angles égaux ε, tels que l'on ait

$$(11) \qquad \cos \varepsilon = \frac{\cos \alpha}{\cos \beta};$$

ces droites sont les lignes *focales* du cône.

Le plan tangent à la sphère menée par le pôle P coupe le cône suivant une ellipse plane.

Soient a, b, c les demi-axes et l'excentricité, on a

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} c^2 &= \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{\operatorname{tang}^2 \alpha - \operatorname{tang}^2 \beta}{\operatorname{tang}^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \beta} \\ &= \frac{\sin^2 \varepsilon}{\sin^2 \alpha}; \end{aligned} \right.$$

ainsi

$$(13) \ A = \frac{\pi}{2} - \frac{\operatorname{tang} \beta}{\operatorname{tang} \alpha} \cos \alpha \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left[\frac{1}{(1 - c^2 \sin^2\varphi \sqrt{1 - \sin^2 \varepsilon \sin^2 \varphi}} \right],$$

fonction elliptique *complète* de troisième espèce à paramètre de forme *circulaire*.

5. *Longueur de l'arc.* L'équation (5) donne

$$(14)\qquad \sin^2\omega = \frac{\sin^2\beta}{\sin^2\rho}\left(\frac{\sin^2\alpha - \sin^2\rho}{\sin^2\alpha - \sin^2\beta}\right),$$

$$(15)\qquad \cos^2\omega = \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\rho}\left(\frac{\sin^2\rho - \sin^2\beta}{\sin^2\alpha - \sin^2\beta}\right);$$

différentiant l'équation (14), on obtient

$$\sin\omega\cos\omega\,\frac{d\omega}{d\rho} = \frac{-\sin^2\alpha\sin^2\beta\cos\rho}{\sin^3\rho\,(\sin^2\alpha - \sin^2\beta)},$$

et de là

$$(16)\qquad \frac{d\omega}{d\rho} = \frac{-\sin\alpha\sin\beta\cos\rho}{\sin\rho\sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2\rho}\,\sqrt{\sin^2\rho - \sin^2\beta}}.$$

Substituant cette valeur dans l'équation (3), il vient

$$(17)\qquad \text{arc}\, ss' = \int_{\rho^0}^{\rho'} d\rho\left[\frac{\sin\rho\sqrt{\cos^2\rho - \cos^2\alpha\cos^2\beta}}{\sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2\rho}\,\sqrt{\sin^2\rho - \sin^2\beta}}\right],$$

l'arc étant mesuré du petit axe vers le grand axe; désignant par s la longueur du quadrant sphérique, alors

$$(18)\qquad s = \int_{\beta}^{\alpha} d\rho\left[\frac{\sin\rho\sqrt{\cos^2\rho - \cos^2\alpha\cos^2\beta}}{\sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2\rho}\,\sqrt{\sin^2\rho - \sin^2\beta}}\right];$$

posons

$$(19)\qquad \cos^2\rho = \frac{\sin^2\alpha\cos^2\varphi + \sin^2\beta\sin^2\varphi}{\tan g^2\alpha\cos^2\varphi + \tan g^2\beta\sin^2\varphi},$$

équation polaire centrale. Les limites de l'intégration doivent être prises maintenant de o à $\frac{\pi}{2}$ ou bien de $\frac{\pi}{2}$ à o, en changeant les signes; différentiant l'équation (19), substituant dans l'équation (18) et intégrant, ayant égard aux limites, on trouve

$$(20)\; s = \frac{\tang\beta}{\tang\alpha}\sin\beta\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\left[\frac{1}{(1 - e^2\sin^2\varphi)\sqrt{1 - \left(\frac{\sin^2\alpha - \sin^2\beta}{\sin^2\alpha}\right)\sin^2\varphi}}\right].$$

6. Soit γ l'angle que fait une section circulaire du cône avec la base elliptique plane du cône, on a

$$(21)\qquad \cos\gamma = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha},$$

$$\sin^2\gamma = \frac{\sin^2\alpha - \sin^2\beta}{\sin^2\alpha};$$

introduisant cette valeur dans l'équation (20), on obtient

$$(22)\; s = \frac{\tang\beta}{\tang\alpha}\sin\beta\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{1 - e^2\sin^2\varphi}\,\sqrt{1 - \sin^2\gamma\sin^2\alpha}}\right),$$

fonction elliptique complète de troisième espèce, dont le paramètre est aussi de forme circulaire.

7. Faisons $\alpha + \beta' = \frac{\pi}{2}$, $\beta + \alpha' = \frac{\pi}{2}$; α' et β' sont les angles principaux du cône dit *supplémentaire* au cône donné; pour ce cône supplémentaire, on a

$$(23)\; s' = \frac{\tang\beta'}{\tang\alpha'}\sin\beta'\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\left[\frac{1}{\sqrt{1 - e'^2\sin^2\varphi}\,\sqrt{1 - \sin^2\gamma'\sin^2\varphi}}\right];$$

or

$$(24)\qquad \frac{\tang\beta'}{\tang\alpha'} = \frac{\tang\beta}{\tang\alpha},\quad e' = e,\quad \sin\gamma' = \sin\varepsilon,$$

donc

$$(25)\; s' = \frac{\tang\beta}{\tang\alpha}\cos\alpha\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\left[\frac{1}{(1 - e^2\sin^2\varphi\sqrt{1 - \sin^2\varepsilon\sin^2\varphi}}\right];$$

ajoutant cette équation à l'équation (13),

$$(26) \qquad A + s' = \frac{\pi}{2}.$$

C'est la belle relation découverte par Mac Cullagh.

Prenant la surface sphérique *totale* S du cône donné et la circonférence entière Σ' de l'ellipse sphérique du cône supplémentaire, on déduit

$$(27) \qquad S + c\Sigma' = 2c^2\pi;$$

c est le rayon de la sphère, et l'on a ce théorème:

THÉORÈME. *L'aire de la base sphérique d'un cône, plus le double de la surface latérale du cône supplémentaire, est égale à l'aire de la moitié de la sphère* (*).

8. Soient $2L$ l'aire latérale du cône, $2L'$ l'aire latérale du cône supplémentaire et S' l'aire de sa base; on a

$$(28) \qquad S + 2L' = 2c^2\pi, \quad S' + 2L = 2c^2\pi,$$

$$(29) \qquad (S + 2L) + (S' + 2L) = 4c^2\pi,$$

$$(30) \qquad S - S' = 2(L - L'),$$

relations qu'on peut énoncer sous forme de théorèmes.

Analogies entre l'ellipse plane et l'ellipse sphérique.

1. Dans une courbe plane, on a

$$(31) \qquad s = \int p\,d\lambda \pm u.$$

s = longueur d'un arc de courbe;

p = perpendiculaire abaissée d'un point *fixe* (pôle) sur une tangente à la courbe;

λ = angle de cette perpendiculaire avec une droite *fixe* passant par le pôle;

u = portion de la tangente comprise entre le point de contact de la tangente et le pied de la perpendiculaire; le signe supérieur lorsque le rayon de courbure au point

(*) Ce qu'on vérifie d'une manière élémentaire sur le cône droit. TM.

de contact est plus grand que la perpendiculaire p, et le signe inférieur dans le cas opposé. Dans le cas d'égalité, on a

$$\frac{du}{d\lambda} = 0.$$

2.

(32) $$\frac{dp}{d\lambda} = u.$$

3. Prenons le centre d'une ellipse plane pour pôle, et le grand axe pour *droite fixe ;* or

$$p = a\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \lambda},$$

de là

(33) $$s = a \int d\lambda \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \lambda} - u;$$

car le rayon de courbure est moindre que p. On a aussi

(34) $$s' = a \int d\varphi \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi},$$

φ étant l'angle d'un diamètre avec le petit axe, et l'arc s' étant compté à partir de l'extrémité du petit axe. Intégrant les deux équations (33) et (34) dans les mêmes limites pour λ et φ, on a

$$s' = \mathrm{K}, \quad s = \mathrm{K} - u;$$

d'où

(35) $$s'' - s = u.$$

Nous pouvons donc prendre sur un quadrant d'ellipse deux arcs mesurés respectivement des extrémités du petit axe et du grand axe, et dont la différence soit égale à une ligne droite.

On démontre facilement que les extrémités de ces arcs sont les intersections de l'ellipse par deux hyperboles biconfocales avec l'ellipse. La première hyperbole, passant par l'extrémité de l'arc mesuré du petit axe, a pour axes

$$(36) \qquad A = ae \sin\lambda, \quad B = ae\cos\lambda;$$

et la seconde hyperbole, passant par l'extrémité de l'arc mesuré du grand axe, a pour axes

$$(37) \qquad A' = \frac{ae\cos\lambda}{\sqrt{1 - e^2\sin^2\lambda}}, \quad B' = \frac{be\sin\lambda}{\sqrt{1 - e^2\cos\lambda}}.$$

4.
$$u = \frac{dp}{d\lambda} = \frac{ae^2\sin\lambda\cos\lambda}{\sqrt{1 - e^2\sin^2\lambda}},$$

donc

$$(38) \qquad au = AA', \quad bu = BB', \quad \frac{BB'}{AA'} = \frac{b}{a}.$$

5. 2θ et $2\theta'$ étant les angles des asymptotes dans les deux hyperboles, on a

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{B}{A} = \cot\lambda, \quad \operatorname{tang}\theta' = \frac{b}{a}\operatorname{tang}\lambda,$$

d'où

$$(39) \qquad \operatorname{tang}\theta\operatorname{tang}\theta' = \frac{b}{a},$$

relation indépendante de λ.

6. r' et r'' étant quatre demi-diamètres de l'ellipse, asymptotes des hyperboles, on a

$$\frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\theta}{b^2} = \frac{1}{r'^2};$$

mettant pour les $\cos\theta$ et $\sin\theta$ les valeurs (39), on a

$$r'^2 = \frac{a^2b^2}{a^2\cos^2\lambda + b^2\sin^2\lambda} = \frac{a^2b^2}{p^2};$$

on trouve de même

$$r''^2 = p^2;$$

de là

$$(40) \qquad r' r'' = p,$$

relation aussi indépendante de λ.

7. Dans les cas où u est un maximum, l'on a

$$\frac{du}{d\lambda} = 0, \quad \text{d'où} \quad \frac{d^2p}{d\lambda^2} = 0;$$

$$\frac{d^2 a\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \lambda}}{d\lambda} = 0;$$

d'où

$$(41) \qquad \tang^2 \lambda = \frac{a}{b},$$

$$(42) \quad A = a(a-b), \quad B = b(a-b), \quad A' = a(a-b), \quad B' = b(a-b),$$

$$A = A', \quad B = B'.$$

Ainsi, les deux hyperboles se confondent ; les deux arcs elliptiques forment le quadrant ; théorème de Fagnani :

$$au = AA' = a(a-b);$$

donc

$$u = a - b, \quad r' = r'' = p, \quad p^2 = ab.$$

Ainsi, le quadrant elliptique est divisé en deux arcs dont la différence est égale à la différence des deux demi-axes.

Nous désignerons ce point d'intersection par le nom de *section linéaire*.

Menons une tangente en ce point : soient t la portion de cette tangente terminée au petit axe, et t' la portion terminée au grand axe ; on aura

$$t = \tang \lambda \sqrt{a^2 \cos^2 \lambda + b^2 \sin^2 \lambda},$$

$$t' = \frac{b^2 \tang \lambda}{\sqrt{a^2 \cos^2 \lambda + b^2 \sin^2 \lambda}}.$$

d'où

$$(44\ bis)\qquad t'-t=\frac{ae^2\sin\lambda\cos\lambda}{\sqrt{a^2\cos^2\lambda+b^2\sin^2\lambda}}=u\ (*).$$

8. Tous les points de section linéaire d'une série d'ellipses biconfocales sont sur une courbe dont l'équation est

$$a^2c^2=\left(x^{\frac{3}{2}}-y^{\frac{3}{2}}\right)\left(x^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{3}{2}}\right);$$

et tous les points de section linéaire d'une série d'ellipses concentriques ayant les mêmes axes principaux, et la somme de leurs axes principaux égale à une quantité constante 2 L, sont sur une hypocycloïde concentrique aux ellipses ; le rayon du cercle fixe est L, et le rayon du cercle roulant est $\frac{1}{4}$ L.

Formule de rectification des courbes sphériques.

9. Soient une sphère et un cône concentriques ; prenons celui-ci du second degré ; les raisonnements ne changent pas pour d'autres cônes. Par le centre O de la sphère menons un plan tangent au cône, coupant la sphère suivant un grand cercle touchant l'ellipse sphérique en un point E, et coupant la base plane du cône (menée comme ci-dessus § 3) en une droite u qui touche l'ellipse base plane du cône en un point i; par l'axe du cône menons un plan perpendiculaire à la droite u ; soit l le point d'intersection : le plan passe par le centre C de l'ellipse sphérique et de l'ellipse plane.

Soient $OE=c$, $Oi=R$, $Ol=P$, $Cl=p$, $Ci=r$, $CE=\varpi=$ arc de grand cercle ; $u=il$; donc

$$R^2=c^2+r^2,\quad P^2=c^2+p^2,\quad R^2=P^2-u^2.$$

Si i' est un point infiniment voisin de i sur l'ellipse plane, et E' le point correspondant sur l'ellipse sphérique, on a

$$ii'=ds,\quad EE'=cd\sigma,$$

(*) On a omis à dessein les équations (43) et (44) de l'auteur, de même les équations suivantes : (45), (56) et (57).

et la proportion

$$\text{aire } O\,i\,i' : \text{aire } OEE' :: P\,ds : c^2\,d\sigma :: R^2 : c^2;$$

car ces triangles élémentaires sont semblables, d'où

$$(46) \qquad d\sigma = \frac{P\,ds}{R^2}.$$

ds est l'élément de l'arc, le rayon de la sphère étant l'unité. Remplaçant cette valeur de ds dans la formule (31), nous trouvons

$$\frac{d\sigma}{d\lambda} = \frac{Pp}{R^2} + \frac{P}{R^2}\frac{du}{d\lambda} = \sin\varpi + \frac{1}{R^2}\left(\frac{P\,du}{d\lambda} - u^2\sin\varpi\right);$$

car

$$P\sin\varpi = p \quad \text{et} \quad P^2 = R^2 - u^2;$$

or

$$(47) \quad \sin\varpi = \frac{p}{P}, \quad u = \frac{dp}{d\lambda}, \quad \frac{du}{d\lambda} = \frac{d^2p}{d\lambda^2}, \quad \frac{P\,dP}{d\lambda} = \frac{pdp}{d\lambda}.$$

Faisant les substitutions dans l'équation précédente, on obtient

$$(48) \qquad \frac{d\sigma}{d\lambda} = \sin\varpi + \frac{1}{R^2}\left[\frac{P\,d^2p}{d\lambda^2} - \frac{dP}{d\lambda}\frac{dp}{d\lambda}\right].$$

Soit ν l'angle iOl,

$$\nu = \frac{u}{P}, \quad \cos\nu = \frac{P}{R}:$$

d'où

$$(49) \quad \frac{d\nu}{d\lambda} = \frac{1}{R^2}\left[\frac{P\,du}{d\lambda} - u\frac{dP}{d\lambda}\right] = \frac{1}{R^2}\left[\frac{P\,d^2p}{d\lambda^2} - \frac{dP}{d\lambda}\frac{dp}{d\lambda}\right];$$

$$(50) \quad \frac{d\sigma}{d\lambda} = \sin\varpi + \frac{d\nu}{d\lambda}, \quad \sigma = \int d\lambda\sin\varpi + \nu,$$

équation analogue à l'équation (31) pour les courbes planes. Or, l'on n'a fait aucun usage des propriétés spéciales au cône du second degré; cette formule appartient donc à une courbe sphérique quelconque, que l'on peut toujours considérer comme l'intersection de la sphère par un cône. Ainsi, un arc de courbe plane est toujours égal à une intégrale définie, plus une longueur d'une droite; et un arc de courbe sphérique est égal à une intégrale définie, plus un arc de grand cercle.

Seconde rectification de l'ellipse sphérique.

10. Soient a, b les demi-axes de l'ellipse plane, et α, β, ρ, ϖ, ν les arcs sous-tendus au centre de la sphère de rayon c, par les droites a, b, r, p, u; on a

$$a = c \operatorname{tang} \alpha, \quad b = c \operatorname{tang} \beta, \quad r = c \operatorname{tang} \rho,$$
$$p = c \operatorname{tang} \varpi, \quad u = \mathrm{P} \operatorname{tang} \nu;$$

dans cette même ellipse,

$$p^2 = a^2 \cos^2\lambda + b^2 \sin^2\lambda, \quad \operatorname{tang}^2 \varpi = \operatorname{tang}^2 \alpha \cos^2 \lambda + \operatorname{tang}^2 \beta \sin^2 \lambda,$$

$$(51) \qquad \sin^2 \varpi = \frac{\operatorname{tang}^2 \alpha \cos^2 \lambda + \operatorname{tang}^2 \beta \sin^2 \lambda}{\operatorname{séc}^2 \alpha \cos^2 \lambda + \operatorname{séc}^2 \beta \sin^2 \lambda}.$$

Substituant cette valeur dans l'équation (50),

$$(52) \qquad \sigma = \int d\lambda \sqrt{\frac{\operatorname{tang}^2 \alpha \cos^2 \lambda + \operatorname{tang}^2 \beta \sin^2 \lambda}{\operatorname{séc}^2 \alpha \cos^2 \lambda + \operatorname{séc}^2 \beta \sin^2 \lambda}} + \nu;$$

faisant

$$(53) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \sin^2 \rho = \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi + \sin^2 \beta \cos^2 \varphi, \\ \text{d'où} \\ \cos^2 \rho = \cos^2 \alpha \sin^2 \varphi + \cos^2 \beta \cos^2 \varphi, \end{array} \right.$$

$$d\rho = \frac{\sin \varphi \cos \varphi \, d\varphi}{\sin \rho \cos \rho} (\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta);$$

substituant ces valeurs dans l'équation (18), on trouve

$$(54) \qquad \sigma' = \int d\rho \sqrt{\frac{\operatorname{tang}^2 \alpha \cos^2 \varphi + \operatorname{tang}^2 \beta \sin^2 \varphi}{\operatorname{séc}^2 \alpha \cos^2 \varphi + \operatorname{séc}^2 \beta \sin^2 \varphi}}.$$

Si, dans les deux dernières équations, on exécute l'intégration entre les mêmes limites de λ et φ, leurs valeurs seront égales, et de là $\sigma' - \sigma = -\nu$.

Or,

$$\sin\nu = \frac{u}{\mathrm{P}}, \quad u = \frac{dp}{d\lambda}, \quad \sin\nu = \frac{p\cdot\frac{dp}{d\lambda}}{p\mathrm{P}};$$

p et P ne peuvent devenir ni zéros ni infinis, par conséquent ils conservent le même signe $+$; le signe de sinus ν est donc le même que celui de $p\,\frac{dp}{d\lambda}$.

Mais

$$p^2 = a^2\sin^2\lambda + b^2\cos^2\lambda;$$

donc

$$p\frac{dp}{d\lambda} = -(a^2 - b^2)\sin\lambda\cos\lambda;$$

ainsi, $\sin\nu$ est négatif, et comme ν est plus petit que π, il s'ensuit que ν est négatif, et l'on a

$$(55) \qquad \sigma' - \sigma = \nu,$$

formule analogue à la formule (35).

11. Lorsque ν est un maximum, $\frac{d\nu}{d\lambda} = 0$, ou, d'après l'équation (49),

$$(58) \qquad \frac{dp}{d\lambda}\cdot\frac{d\mathrm{P}}{d\lambda} = \mathrm{P}\frac{d^2p}{d\lambda^2},$$

$$p = \sqrt{a^2\cos^2\lambda + b^2\sin^2\lambda}, \quad \mathrm{P} = \sqrt{c^2 + p^2}.$$

Substituant dans l'équation (58), et remplaçant $\frac{a}{c}$ par $\operatorname{tang}\alpha$, et $\frac{b}{c}$ par $\operatorname{tang}\beta$, on obtient

$$(59) \qquad \operatorname{tang}^2\lambda = \frac{\operatorname{tang}\alpha\,\operatorname{séc}\alpha}{\operatorname{tang}\beta\,\operatorname{séc}\beta} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\operatorname{séc}^2\varepsilon;$$

ε est l'excentricité de l'ellipse sphérique; résultat analogue à l'équation (41).

12. On trouve, en faisant les substitutions,

$$(60)\qquad \tang \nu = \frac{e^2 \sin^2 \alpha \sin \lambda \cos \lambda}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \lambda}\,\sqrt{1 - \sin^2 \varepsilon \sin^2 \lambda}}.$$

13. Concevons deux hyperboles sphériques, biconfocales à l'ellipse sphérique, l'une passant par l'extrémité de l'arc mesuré de l'extrémité du petit axe et l'autre par l'extrémité de l'arc compté à partir du grand arc; désignons par $2A$, $2B$ les axes de la première hyperbole, et par $2A'$ et $2B'$ les axes de la deuxième hyperbole: on trouve, sans beaucoup de peine,

$$(61)\qquad \tang^2 A = \frac{\sin^2 \varepsilon \sin^2 \lambda}{1 - \sin^2 \varepsilon \sin^2 \lambda},\quad \tang^2 B = \frac{\sin^2 \varepsilon \cos^2 \lambda}{1 - \sin^2 \varepsilon \sin^2 \lambda},$$

$$(62)\qquad \tang^2 A' = \frac{\tang^2 \varepsilon \cos^2 \lambda}{1 - e^2 \sin^2 \lambda},\quad \tang^2 B' = \frac{e^2 \cos^2 \varepsilon \sin^2 \beta \sin^2 \lambda}{1 - e^2 \sin^2 \lambda};$$

et de là

$$(63)\qquad \left\{ \begin{array}{l} \tang \nu \tang \beta \cos \alpha = \tang B \tang B', \\ \tang \nu \tang \alpha \cos \beta = \tang A \tang A', \end{array} \right.$$

$$\frac{\tang B \tang B'}{\tang A \tang A'} = \frac{\tang \beta \operatorname{séc} \beta}{\tang \alpha \operatorname{séc} \alpha};$$

résultats analogues à l'équation (38) : dans les hyperboles,

$$\tang^2 \varepsilon' = \frac{\tang^2 A + \tang^2 B}{1 - \tang^2 B},\quad \tang^2 \varepsilon'' = \frac{\tang^2 A' + \tang^2 B'}{1 - \tang^2 B'};$$

dans l'ellipse,

$$\tang^2 \varepsilon = \frac{\tang^2 \alpha - \tang^2 \beta}{1 + \tang^2 \beta}:$$

d'où

$$\varepsilon = \varepsilon' = \varepsilon''.$$

14. Lorsque ν est un maximum,

$$\tang^2 \lambda = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \text{séc}^2 \alpha,$$

et de là, en ce cas,

$$(64) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tang^2 A = \tang \alpha \text{ séc } \alpha (\sin \alpha - \sin \beta), \\ \tang^2 B = \tang \beta \text{ séc } \beta (\sin \alpha - \sin \beta), \\ \tang^2 A' = \tang \alpha \text{ séc } \alpha (\sin \alpha - \sin \beta), \\ \tang^2 B' = \tang \beta \text{ séc } \beta (\sin \alpha - \sin \beta), \end{array} \right.$$

d'où

$$A = A', \quad B = B';$$

ou, lorsque ν est un maximum, les deux hyperboles se réunissent, et les axes de l'ellipse sphérique ont une extrémité commune et forment ensemble le quadrant; ce point commun peut être appelé le point de *section circulaire.*

Dans ce même cas,

$$(65) \qquad \tang \nu = \text{séc } \alpha \text{ séc } \beta (\sin \alpha - \sin \beta).$$

15. Les plans asymptotes sont parallèles aux sections circulaires du cône; soit 2θ l'angle asymptotique de l'hyperbole (A, B): d'après l'équation (21), on a donc

$$\sin^2 \theta = \frac{\sin^2 \beta'}{\sin^2 \alpha'},$$

β' et α' étant les demi-angles principaux du cône qui a pour base l'hyperbole sphérique.

Or

$$\sin \beta' = \cos \lambda, \quad \sin \alpha' = \cos A \quad \text{et} \quad \sin^2 \theta = \frac{\cos^2 \lambda}{\cos^2 A};$$

mettant pour $\cos^2 A$ sa valeur déduite de l'équation (61), on trouve

$$(66) \qquad \tang \theta = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} \cot \lambda.$$

Éliminant θ entre cette équation et l'équation de l'ellipse $\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\alpha} + \frac{\sin^2\theta}{\sin^2\beta} = 1$, il résulte

$$(67) \qquad \frac{\text{tang}^2\alpha\cos^2\lambda + \text{tang}^2\beta\sin^2\lambda}{\text{séc}^2\alpha\cos^2\lambda + \text{séc}^2\beta\sin^2\lambda} = \frac{\sin^2\alpha\sin^2\beta}{\sin^2\rho};$$

et, d'après l'équation (51),

$$(68) \qquad \sin\rho = \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin\varpi}.$$

Soit $2\theta'$ l'angle asymptotique de la deuxième hyperbole (A', B'); on a

$$\sin\theta' = \frac{\sin\beta''}{\sin\alpha''},$$

β'' et α'' sont les demi-angles principaux du cône qui a pour base l'hyperbole. On trouve aisément que

$$\text{tang}\,B'' = \frac{\text{tang}\,B'}{\text{tang}\,A'}, \quad \sin\alpha'' = \cos A';$$

d'où, d'après l'équation (62),

$$\sin^2\theta' = \frac{\text{tang}^2\beta\sin^2\lambda}{\text{tang}^2\alpha\cos^2\lambda + \text{tang}^2\beta\sin^2\lambda},$$

$$\cos^2\theta' = \frac{\text{tang}^2\alpha\cos^2\lambda}{\text{tang}^2\alpha\cos^2\lambda + \text{tang}^2\beta\sin^2\lambda},$$

$$(69) \qquad \text{tang}\,\theta' = \frac{\text{tang}\,\beta}{\text{tang}\,\alpha}\,\text{tang}\,\lambda,$$

et

$$(70) \qquad \text{tang}\,\theta\,\text{tang}\,\theta' = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha};$$

résultat indépendant de λ et parfaitement conforme au résultat de l'équation (39).

16. Nommons ρ' le demi-diamètre de l'ellipse, asymptote de l'hyperbole; on a

$$(71) \qquad \sin^2\rho' = \frac{\text{tang}^2\alpha\cos^2\lambda + \text{tang}^2\beta\sin^2\lambda}{\text{séc}^2\alpha\cos^2\lambda + \text{séc}^2\beta\sin^2\lambda},$$

et de là

$$(72) \qquad \sin\rho\sin\rho' = \sin\alpha\sin\beta,$$

analogue à l'équation (40), et $\rho' = \varpi$; ou le demi-diamètre de l'ellipse, asymptote de l'hyperbole (A′, B′), est égal à la perpendiculaire abaissée du centre de l'ellipse sur la tangente passant par le point d'intersection de l'ellipse et de l'hyperbole.

17. Construisons un cercle sur le grand axe de l'ellipse sphérique comme diamètre; soient m et μ les points où les ordonnées prolongées des extrémités des arcs elliptiques σ et σ' coupent ce cercle; désignons par r_1 et r'_1 les demi-diamètres de l'ellipse passant par ces points, et par ϑ et ϑ' les angles que r_1 et r'_1 font avec le grand axe (construction analogue à celle qu'on fait sur l'ellipse plane).

On a

$$\vartheta = \frac{\pi}{2} - \lambda,$$

H étant l'ordonnée sphérique du point μ, on a, dans ce cas,

$$\frac{\text{tang}^2\zeta}{\text{tang}^2\alpha} + \frac{\text{tang}^2 H}{\text{tang}^2\alpha} = 1 \text{ dans le cercle},$$

$$\frac{\text{tang}^2\zeta}{\text{tang}^2\alpha} + \frac{\text{tang}^2\eta}{\text{tang}^2\beta} = 1 \text{ dans l'ellipse};$$

d'où

$$\frac{\text{tang } H}{\text{tang } \alpha} = \frac{\text{tang } \eta}{\text{tane } \beta}:$$

et les formules du triangle rectangle donnent

$$\frac{\operatorname{tang}^2 \mathrm{H}}{\operatorname{tang}^2 \alpha} = \sin^2 \vartheta',$$

ou

$$\sin^2 \vartheta' = \frac{\operatorname{tang}^2 \eta}{\operatorname{tang}^2 \beta} = \frac{\operatorname{tang}^2 \beta \sin^2 \lambda}{\operatorname{tang}^2 \alpha \cos^2 \lambda + \operatorname{tang}^2 \beta \sin^2 \lambda}.$$

Éliminant ϑ' entre cette équation et l'équation polaire (au centre) de l'ellipse (19), on obtient

$$(73) \qquad \operatorname{tang}^2 r'_1 = \operatorname{tang}^2 \alpha \cos^2 \lambda + \operatorname{tang}^2 \beta \sin^2 \lambda,$$

et comme

$$\vartheta = \frac{\pi}{2} - \lambda,$$

$$\operatorname{tang}^2 r_1 = \frac{\operatorname{tang}^2 \alpha \operatorname{tang}^2 \beta}{\operatorname{tang}^2 \alpha \cos^2 \lambda + \operatorname{tang}^2 \beta \sin^2 \lambda},$$

ou

$$(74) \qquad \operatorname{tang} r_1 \operatorname{tang} r'_1 = \operatorname{tang} \alpha \operatorname{tang} \beta.$$

18. Résumant les valeurs des angles des asymptotes des hyperboles, et aussi les valeurs des diamètres de l'ellipse passant par les points m et μ, nous trouvons

$$\operatorname{tang} \theta = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} \cot \lambda, \qquad \operatorname{tang} \vartheta = \cot \lambda,$$

$$\operatorname{tang} \theta' = \frac{\operatorname{tang} \beta}{\operatorname{tang} \alpha} \operatorname{tang} \lambda, \qquad \operatorname{tang} \vartheta' = \frac{\operatorname{tang} \beta}{\operatorname{tang} \alpha} \operatorname{tang} \lambda.$$

Ici nous remarquons une remarquable interruption dans l'analogie que nous avons toujours trouvée exister entre les propriétés de l'ellipse plane et de l'ellipse sphérique : dans l'ellipse plane, les asymptotes de l'hyperbole coïncident avec les diamètres qui passent par les points m et μ (§ 5, p. 201), et cela existe encore pour l'hyperbole sphérique voisine du grand axe (A', B'), mais n'existe plus pour l'hyperbole voisine du petit axe (A, B); en d'autres termes, on a

$$\theta' = \vartheta',$$

mais θ n'est pas égal à ϑ.

19. Soit η la coordonnée du point de *section circulaire;* par ce point menons une tangente, et soit z le point où cette tangente coupe le petit axe; on a

$$\operatorname{tang} \eta \operatorname{tang} \zeta = \operatorname{tang}^2 \beta,$$

ζ est la distance du centre de l'ellipse au point z; et

$$\cos \tau = \cos \varkappa_1 \cos (\zeta - \eta) = \cos \varkappa_1 \cos \zeta \cos \eta + \cos \varkappa_1 \sin \zeta \sin \eta;$$

$\varkappa_1$ est l'abscisse du point de *section circulaire*, et τ la longueur de la tangente entre ce point et le point z.

Éliminant ζ, on obtient

$$\cos \tau = \frac{\cos \varkappa_1 \sin \eta \operatorname{séc}^2 \beta}{\sqrt{\operatorname{tang}^4 \beta + \operatorname{tang}^2 \eta}},$$

et η étant l'ordonnée commune à l'ellipse et à l'hyperbole,

$$\operatorname{tang}^2 \eta = \frac{\sin^2 \beta \cos^2 \lambda}{\cos^2 \alpha \sin^2 \lambda + \cos^2 \beta \cos^2 \lambda},$$

et aussi

$$\sin \varkappa_1 = \sin \alpha \sin \lambda;$$

faisant les substitutions nécessaires, nous obtenons

$$\operatorname{tang}^2\tau = \operatorname{tang}^2\lambda \left\{\frac{\operatorname{tang}^2\alpha\cos^2\lambda + \operatorname{tang}^2\beta\sin^2\lambda}{\operatorname{séc}^2\alpha\cos^2\lambda + \operatorname{séc}^2\beta\sin^2\lambda}\right\},$$

$$(76)\quad \operatorname{tang}\tau = \operatorname{tang}\lambda\sin\alpha\sqrt{\frac{1 - e^2\sin^2\lambda}{1 - \sin^2\varepsilon\sin^2\lambda}},$$

ou

$$e^2 = \frac{\sin^2\alpha - \sin^2\beta}{\sin^2\alpha\cos^2\beta} \quad \text{(voir équation 12).}$$

Soit τ' le segment de la tangente prolongée jusqu'au grand axe, nous aurons

$$\cos\tau' = \frac{\sin\varkappa_1\cos\eta\operatorname{séc}^2\alpha}{\sqrt{\operatorname{tang}^4\alpha + \operatorname{tang}^2\varkappa_1}},$$

$$\operatorname{tang}^2\varkappa_1 = \frac{\operatorname{tang}^4\alpha\cos^2\lambda}{\operatorname{tang}^2\alpha\cos^2\lambda + \operatorname{tang}^2\beta\sin^2\lambda},$$

$$\sin^2\eta = \frac{\operatorname{tang}^4\beta\sin^2\lambda}{\operatorname{tang}^2\alpha\operatorname{séc}^2\alpha\cos^2\lambda + \operatorname{tang}^2\beta\operatorname{séc}^2\beta\sin^2\lambda};$$

éliminant $\varkappa_1$ et η, on a

$$(77)\quad \operatorname{tang}\tau' = \frac{\operatorname{tang}\lambda\operatorname{tang}^2\beta\cos^2\alpha}{\sin\alpha\sqrt{\frac{1 - e^2\sin^2\lambda}{1 - \sin^2\varepsilon\sin^2\lambda}}};$$

de là

$$(78)\quad \operatorname{tang}(\tau - \tau') = \frac{e^2\sin\alpha\sin\lambda\cos\lambda}{\sqrt{(1 - e^2\sin^2\lambda)(1 - \sin^2\varepsilon\sin^2\lambda)}},$$

d'où, en vertu de l'équation (60),

$$\tau - \tau' = \nu,$$

analogue à l'équation (44 *bis*).
