Nouvelles annales de mathématiques

F. Brioschi

Sur les fonctions de Sturm

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 13 (1854), p. 71-80
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1854_1_13__71_1>

SUR LES FONCTIONS DE STURM;

PAR M. BRIOSCHI (F.),
Professeur à l'Universite de Padoue.

On appelle généralement *fonctions de Sturm*, les résidus que l'on obtient en appliquant la méthode du célèbre auteur à la recherche du nombre des racines réelles d'une équation algébrique. Il y a déjà quelques années que M. Sylvester a donné *sans démonstration* (*voir* t. XI, p. 403) des formules qui représentent ces fonctions par des expressions formées avec les racines de ces équations. Ces formules ont été démontrées depuis par M. Sturm (Journal de M. Liouville, t. VII). Partant de ces formules, MM. Cayley et Borchardt sont parvenus à mettre ces formules sous la forme de *déterminants des puissances* des racines de l'équation (Journal de M. Liouville, t. XI et XII). Enfin, M. Cayley, en faisant usage de *moyens indirects*, a représenté ces fonctions au moyen des coefficients de l'équation (Journal de M. Liouville, t. XIII, p. 269; 1848). Le but de cette Note est de parvenir *directement* à des formules analogues à celles de M. Cayley.

Note du Rédacteur. Nous croyons nécessaire de faire précéder ce beau travail de quelques lemmes sur les déterminants.

1. *Lemme.* Dans un déterminant, si l'on rend identiques deux colonnes ou deux lignes, le déterminant s'annule.

2. *Lemme.* En multipliant par la même quantité tous les termes d'une même colonne ou d'une même ligne, le nouveau déterminant est égal au premier multiplié par cette quantité.

3. *Lemme.*

$$\begin{vmatrix} a_1+\alpha_1, & b_1, & c_1 \\ a_2+\alpha_2, & b_2, & c_2 \\ a_3+\alpha_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1, & b_1, & c_1 \\ \alpha_2, & b_2, & c_2 \\ \alpha_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix}$$

Ce lemme existe pour un déterminant quelconque, et est une conséquence immédiate du théorème de Taylor.

1^er^ *Corollaire.* Faisant les α égaux aux b, on a, en vertu du premier lemme,

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1, & b_1, & c_1 \\ a_2+b_2, & b_2, & c_2 \\ a_3+b_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix}.$$

2^e^ *Corollaire.*

$$\begin{vmatrix} a_1+mb_1, & b_1, & c_1 \\ a_2+mb_2, & b_2, & c_2 \\ a_3+mb_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix}.$$

La proposition est une conséquence du précédent corollaire, lorsque m est un nombre entier positif; et comme il s'agit d'une *identité*, il s'ensuit que la proposition est vraie pour une valeur quelconque de m.

3e *Corollaire.*

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1+ma_1, & c_1+mb_1+na_1 \\ a_2, & b_2+ma_2, & c_2+mb_2+na_2 \\ a_3, & b_3+ma_3, & c_3+mb_3+na_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix}.$$

Conséquence du précédent corollaire.

1. Soit

$$\varphi(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

l'équation proposée; et soient $\varphi_1(x)$ la dérivée du polynôme $\varphi(x)$, et $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$,..., les résidus obtenus par la méthode de M. Sturm. Nous aurons

$$\varphi_2 = \varphi_1 q_1 - \varphi; \quad \varphi_3 = \varphi_2 q_2 - \varphi_1, \ldots; \quad \varphi_r = \varphi_{r-1} q_{r-1} - \varphi_{r-2};$$

et de là

$$\varphi_2 = \varphi_1 D_1 - \varphi N_1; \quad \varphi_3 = \varphi_1 D_2 - \varphi N_2, \ldots, \quad \varphi_r = D_{r-1} - \varphi N_{r-1};$$

$$\frac{N_1}{D_1}, \quad \frac{N_2}{D_2}, \ldots, \quad \frac{N_{r-1}}{D_{r-1}}$$

étant les réduites successives de la fraction continue

$$\cfrac{1}{q_1 - \cfrac{1}{q_2 - \cfrac{1}{q_3 - \ldots,}}}$$

où q_1, q_2, q_3,... sont les quotients du premier degré en x.

Les deux équations

$$\varphi_{r-1} = \varphi_1 D_{r-2} - \varphi N_{r-2},$$
$$\varphi_r = \varphi_1 D_{r-1} - \varphi N_{r-1}$$

donnent, ayant égard à ce que $N_{r-1} D_{r-2} - N_{r-2} D_{r-1} = 1$,

$$\varphi = \varphi_{r-1} D_{r-1} - \varphi_r D_{r-2},$$
$$\varphi_1 = \varphi_{r-1} N_{r-1} - \varphi_r N_{r-2},$$

où

φ_r est de degré $n - r$,
D_{r-1} est de degré $r - 1$,
N_{r-1} est de degré $r - 2$.

Faisons

$$\varphi_{(r-1)} = A_{r-1} x^{n-r+1} + \ldots,$$
$$N_{r-1} = b_{r-2} x^{r-2} + \ldots,$$
$$D_{r-1} = c_{r-1} x^{r-1} + \ldots;$$

donc la valeur de φ donne

$$A_{r-1} c_{r-1} = 1;$$

mais

$$q_1 = \frac{1}{n} x,$$

et pour avoir le plus haut terme de D_{r-1}, il faut multiplier le plus haut terme de N_{r-1} par q_1; donc, ainsi

$$b_{r-2} = n c_{r-1},$$

(1) $$c_{r-1} = \frac{1}{A_{r-1}}, \quad b_{r-2} = \frac{n}{A_{r-1}};$$

c_{r-1} et b_{r-2} ont donc les mêmes signes; ainsi les trois séries

$$\varphi, \ \varphi_1, \ \varphi_2, \ldots, \ \varphi_{r-1}, \ \varphi_r,$$
$$1, \ D_1, \ D_2, \ldots, \ D_{r-1}, \ D_r,$$
$$0, \ 1, \ N_2, \ldots, \ N_{r-1}, \ N_r,$$

lorsqu'on y fait $x = +\infty$, présentent les mêmes successions de permanences et de variations; de même en y faisant $x = -\infty$.

Ce sont des séries *signaleticamente equivalenti.*

2. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ les n racines de l'équation

$$\varphi(x) = 0.$$

Si l'on substitue une quelconque de ces racines, soit α_s, dans l'identité

$$\varphi_{(r)} = \varphi_1 D_{r-1} - \varphi N_{r-1},$$

on obtient

$$\varphi_r(\alpha_s) = \varphi_1(\alpha_s) D_{r-1}(\alpha_s);$$

par les formules connues de la décomposition des fractions, on a

$$\sum_1^n \frac{\varphi_r(\alpha_s)}{\varphi_1(\alpha_s)} = 0, \qquad \sum_1^n \frac{\alpha_s \varphi_r(\alpha_s)}{\varphi_1(\alpha_s)} = 0, \ldots,$$

$$\sum_1^n \frac{(\alpha_s)^{r-2} \varphi_r(\alpha_s)}{\varphi_1(\alpha_s)} = 0, \quad \sum_1^n \frac{(\alpha_s)^{r-1} \varphi_r(\alpha_s)}{\varphi_1(\alpha_s)} = A_r,$$

où A_r est le coefficient de x^{n-r} dans la fonction $\varphi_r(x)$. Donc

$$\sum_1^n D_{r-1}(\alpha_s) = 0, \qquad \sum_1^n \alpha_s D_{r-1}(\alpha_s) = 0, \ldots,$$

$$\sum_1^n (\alpha_s)^{r-2} D_{r-1}(\alpha_s) = 0, \quad \sum_1^n (\alpha_s)^{r-1} D_{r-1}(\alpha_s) = A_r;$$

faisons

$$(2) \qquad D_{r-1}(\alpha_s) = c_{r-1}\alpha^{r-1} + c_{r-2}\alpha^{r-2} + \ldots + c_1\alpha + c_0$$

et

$$s_m = \alpha_1^m + \alpha_2^m + \ldots + \alpha_n^m = \sum_1^n (\alpha_s)^m;$$

nous aurons

$$\begin{aligned}
c_0 s_0 + c_1 s_1 + \ldots + c_{r-1} s_{r-1} &= 0,\\
c_0 s_1 + c_1 s_2 + \ldots + c_{r-1} s_r &= 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\\
c_0 s_{r-2} + c_1 s_{r-1} + \ldots + c_{r-1} s_{2r-3} &= 0,\\
c_0 s_{r-1} + c_1 s_r + \ldots + c_{r-1} s_{2r-2} &= A_r;
\end{aligned}$$

posons

$$\Delta_r = \begin{vmatrix} s_0, & s_1, & \ldots, & s_{r-1} \\ s_1, & s_2, & \ldots, & s_r \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{r-2}, & s_{r-1}, & \ldots, & s_{2r-3} \\ s_{r-1}, & s_r, & \ldots, & s_{2r-2} \end{vmatrix};$$

on a, en résolvant les équations,

$$c_0 = \frac{A_r}{\Delta_r}\frac{d.\Delta_r}{ds_{r-1}};\quad c_1 = \frac{A_r}{\Delta_r}\frac{d.\Delta_r}{ds_r},\ldots;\quad c_{r-1} = \frac{A_r}{\Delta_r}\frac{d.\Delta_r}{ds_{2r-2}}:$$

et ayant égard aux équations (2) et (1), l'on a

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &D_{r-1} = \frac{A_r}{\Delta_r} \\ &\times\left[\frac{d.\Delta_r}{ds_{2r-2}}x^{r-1} + \frac{d.\Delta_r}{ds_{2r-3}}x^{r-2} + \ldots + \frac{d.\Delta_r}{ds_r}x + \frac{d.\Delta_r}{ds_{r-1}}\right],\end{aligned}\right.$$

$$\frac{A_r}{\Delta_r}\frac{d.\Delta_r}{ds_{2r-2}} = \frac{1}{A_{r-1}};$$

d'où

$$A_r = \frac{1}{A_{r-1}}\cdot\frac{\Delta_r}{\Delta_{r-1}};\qquad \text{car}\quad \Delta_{r-1} = \frac{d.\Delta_r}{ds_{2r-2}};$$

et comme

$$A_1 = n = \Delta_1 = s_0,$$

on aura, pour r pair,

$$A_r = \frac{(\Delta_2\Delta_4\ldots\Delta_{r-2})^2}{(\Delta_1\Delta_3\ldots\Delta_{r-1})^2}\Delta_r;$$

et pour r impair,

$$A_r = \frac{(\Delta_1\Delta_3\ldots\Delta_{r-2})^2}{(\Delta_2\Delta_4\ldots\Delta_{r-1})^2}\Delta_r;$$

ainsi le signe de A_r dépend de Δ_r; c'est ce qui constitue le théorème de M. Borchardt (Journal de M. Liouville, tome XII, page 58), et au moyen de l'équation (3), on a la valeur de D_{r-1} en fonction des puissances des racines.

3. *Calcul de* A_r. Calculons maintenant A_r en fonction des *coefficients* de l'équation; pour fixer les idées, prenons $r = 4$; alors

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} s_0, & s_1, & s_2, & s_3 \\ s_1, & s_2, & s_3, & s_4 \\ s_2, & s_3, & s_4, & s_5 \\ s_3, & s_4, & s_5, & s_6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & s_0, & s_1, & s_2, & s_3 \\ 0, & s_0, & s_1, & s_2, & s_3, & s_4 \\ s_0, & s_1, & s_2, & s_3, & s_4, & s_5 \\ s_1, & s_2, & s, & s_4, & s_5, & s_6 \end{vmatrix}.$$

Ajoutons la deuxième colonne à la première multipliée par a_1, on a les six termes

$$(a)\quad \begin{cases} 0 + a_1.1\,; & 1 + a_1\,0; \quad 0 + a_1.0\,; \\ s_0 + a_1.0; & s_1 + a_1.s_0\,; \quad s_2 + a_1.s_1\,; \end{cases}$$

ajoutons la troisième colonne à la deuxième, multipliée par a_1, et à la première multipliée par a_2, on a les six termes

$$(b)\begin{cases} 0 + a_1.0 + a_2.1\,; \; 0 + a_1.1 + a_2.0; \; s_0 + a_1.0 + a_2.0\,; \\ s_1 + a_1.s_0 + a_2.0\,; \; s_2 + a_1\,s_1 + a_2.s_0; \; s_3 + a_1\,s_2 + a_2.s_1; \end{cases}$$

de même

$$(c)\begin{cases} 0 + a_1.0 + a_2.0 + a_3.1\,; \quad 0+a_1.0 + a_2.1 + a_3.0\,; \\ \qquad s_1 + a_1.s_0 + a_2.0 + a_3.0, \text{ etc.}; \end{cases}$$

et, en vertu du troisième corollaire, et des relations connues entre les puissances des racines et les coefficients de l'équation, on a

$$\Delta_1 = -\begin{vmatrix} 1, & a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & a_5 \\ 0, & 1, & a_1, & a_2, & a_3, & a_4 \\ 0, & 0, & n, & (n-1)a_1, & (n-2)a_2, & (n-3)a_3 \\ 0, & n, & (n-1)a_1, & (n-2)a_2, & (n-3)a_3, & (n-4)a_4 \\ n, & (n-1)a_1, & (n-2)a_2, & (n-3)a_3, & (n-4)a_4, & (n-5)a_5 \\ a_1, & 2a_2, & 3a_3, & 4a_4, & 5a_5, & 6a_6 \end{vmatrix}.$$

La première colonne est la même que celle de la première expression de D_4; la deuxième colonne est la ligne (b); la troisième colonne est la ligne (c), etc.; la loi de formation est évidente.

Ainsi, on a A_1, et par conséquent A_4, et en général A_r, en fonction des coefficients de l'équation.

4. *Calcul de* D_r. On peut, du reste, obtenir de la même manière D_{r-1} en fonction des coefficients de l'é-

quation. En effet, on a, par exemple, pour $r = 3$,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{D}_2 &= \left(\frac{\Delta_1}{\Delta_2}\right)^2 \begin{vmatrix} s_0, & s_1, & s_2 \\ s_1, & s_2, & s_3 \\ 1, & x, & x^2 \end{vmatrix} \\
&= \left(\frac{\Delta_1}{\Delta_2}\right)^2 \begin{vmatrix} s_0, & s_1 + a_1 s_0, & s_2 + a_1 s_1 + a_2 s_0 \\ s_1, & s_2 + a_1 s_1, & s_3 + a_1 s_2 + a_2 s_0 \\ 1, & x + a_1, & x^2 + a_1 x + a_2 \end{vmatrix} \\
&= -\left(\frac{\Delta_1}{\Delta_2}\right)^2 \begin{vmatrix} n, & (n-1)\,a_1, & (n-2)\,a_2 \\ a, & 2a_2, & 3a_3 \\ 1, & x + a_1, & x^2 + a_1 x - a_2 \end{vmatrix};
\end{aligned}
$$

or

$$\Delta_1 = s_0 = n;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} s_0, & s_1 \\ s_1, & s_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} s_0, & s_1 + a_1 s_0 \\ s_1, & s_2 + a_1 s_1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} n, & (n-1)\,a_1 \\ a_1, & 2a_2 \end{vmatrix}.$$

5. *Calcul de* φ_r. Les fonctions de Sturm peuvent, par le même procédé, s'exprimer facilement en fonction des coefficients de l'équation. La théorie de la décomposition des fractions rationnelles donne

$$\frac{\varphi_r(x)}{\varphi x} = \sum_1^n \frac{\varphi_r(\alpha_s)}{(x-\alpha_s)\,\varphi_1(\alpha_s)} = \sum_1^n \frac{\mathrm{D}_{r-1}(\alpha_s)}{x-\alpha_s} \quad (\S\ 2).$$

Faisons

$$u_m = \frac{\alpha_1^m}{x-\alpha_1} + \frac{\alpha_2^m}{x-\alpha_2} + \ldots + \frac{\alpha_n^m}{x-\alpha_n},$$

donc

$$\frac{\Delta_r}{\mathrm{A}_r}\,\frac{\varphi_r(x)}{\varphi(x)} = \begin{vmatrix} s_0, & s_1, \ldots, & s_{r-1} \\ s_1, & s_2, \ldots, & s_r \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{r-2}, & s_{r-1}, \ldots, & s_{2r-3} \\ u_0, & u_1, \ldots, & u_{r-1} \end{vmatrix} \quad (v.\ \text{éq. } 3);$$

or

$$u_m = x u_{m-1} - s_{m-1} \quad \text{et} \quad u_0 = \frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)};$$

donc on obtient, par substitutions successives,

$$(4) \qquad \varphi(x)\, u_m = x^m \varphi_1(x) - f_{m-1}(x)\, \varphi x,$$

ou

$$f_{(m-1)}(x) = x^{m-1} s_0 + x^{m-2} s_1 + \ldots + x s_{m-2} + s_{m-1};$$

l'équation (4) donne

$$(a) \left\{ \begin{array}{l} \quad \varphi(x)[u_m + a_1 u_{m-1} + a_2 u_{m-2} + \ldots + a_m u_0] \\ = \varphi_1 x [x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m] \\ - \varphi(x)[n x^{m-1} + (n-1) a_1 x^{m-2} + \ldots + (n-m+1) a_{m-1}]. \end{array} \right.$$

Faisons, par exemple, $r = 4$, on a (*voir* ci-dessus)

$$\frac{\varphi_4 x}{\varphi(x)} = \left(\frac{\Delta_2}{\Delta_1 \Delta_3}\right)^2 \begin{vmatrix} s_0, & s_1, & s_2, & s_3 \\ s_1, & s_2, & s_3, & s_4 \\ s_2, & s_3, & s_4, & s_5 \\ u_0, & u_1, & u_2, & u_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\Delta_2}{\Delta_1 \Delta_3}\right)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0, & s_0, & s_1, & s_2, & s_3 \\ s_0, & s_1, & s_2, & s_3, & s_4 \\ s_1, & s_2, & s_3, & s_4, & s_5 \\ 0, & u_0, & u_1, & u_2, & u_3 \end{vmatrix};$$

procédant par la même méthode de multiplication suivie plus haut, et ayant égard à l'équation (a), on obtient

$$\varphi_4(x) = -\left(\frac{\Delta_2}{\Delta_1 \Delta_3}\right)^2 \begin{vmatrix} 1, & a_1, & a_2, & a_3, & a_4 \\ 0, & n, & (n-1)a_1, & (n-2)a_2, & (n-3)a_3 \\ n, & (n-1)a_1, & (n-2)a_2, & (n-3)a_3, & (n-4)a_4 \\ a_1, & 2a_2, & 3a_3, & 4a_4, & 5a_5 \\ 0, & \varphi_1 x, & \nu_1, & \nu_2, & \nu \end{vmatrix},$$

où

$$\begin{aligned} \nu_1 &= (x + a_1)\varphi_1 x - n\varphi(x), \\ \nu_2 &= (x^2 + a_1 x + a_2)\,\varphi_1(x) - [nx + (n-1)a_1]\,\varphi(x), \\ \nu_3 &= [x^3 + a_1 x_2 + a_2 x + a_3]\,\varphi_1(x) \\ &\quad - [nx^2 + (n-1)a_1 x + (n-2)a_2]\,\varphi(x). \end{aligned}$$

6. *Calcul de* N_r. Soit, par exemple, $r = 4$; ayant

égard au lemme (§ 2), on a

$$\varphi_4(x) = -\left(\frac{\Delta_2}{\Delta_1\Delta_3}\right)^2 \begin{vmatrix} 1, & a_1, & a_2, & a_3 & a_4 \\ 0, & n, & (n-1)a_1, & (n-2)a_2, & (n-3)a_3 \\ n, & (n-1)a_1, & (n-2)a_2, & (n-3)a_3, & (n-4)a_4 \\ a_1, & 2a_2, & 3a_3, & 4a_4, & 5a_5 \\ 0, & \varphi_1(x), & (x+a_1)\varphi_1(x), & (x^2+a_1x+a_2)\varphi_1(x), & (x^3+a_1x_2+a_2x+a_3)\varphi_1(x) \end{vmatrix}$$

$$+\left(\frac{\Delta_2}{\Delta_1\Delta_3}\right)^2 \begin{vmatrix} 1, & a_1, & a_2, & a_3, & a_4 \\ 0, & n, & (n-1)a_1, & (n-2)a_2, & (n-3)a_3 \\ n, & (n-1)a_1, & (n-2)a_2, & (n-3)a_3, & (n-4)a_4 \\ a, & 2a_2, & 3a_3, & 4a_4, & 5a_5 \\ 0, & 0, & n\varphi(x), & [nx+(n-1)a_1]\varphi(x), & [nx^2+(n-1)a_1, x+(n-2)a_2]\varphi(x) \end{vmatrix}.$$

Dans le premier déterminant, divisant tous les termes de la dernière ligne par $\varphi_1(x)$, le nouveau déterminant est D_3 (§ 4); dans le deuxième déterminant, divisant tous les termes de la dernière ligne par $\varphi(x)$, on obtient un déterminant que je désigne par P; ainsi

$$\varphi_4 x = D_3\varphi_1(x) + \left(\frac{\Delta_2}{\Delta_1\Delta_3}\right)^2 \varphi(x).P;$$

or

$$N_3\varphi(x) = D\ \varphi_1(x) - \varphi_4(x) \quad (\S\ 2),$$

donc

$$N = -\left(\frac{\Delta_2}{\Delta_1\Delta_3}\right)^2 P;$$

la loi de formation se voit facilement

Note. Le savant analyste a trouve aussi la valeur generale de N_r, celle des quotients et des relations entre ces valeurs que nous insererons prochainement, ainsi qu'un beau travail de M. Sylvester sur ces valeurs et ces relations, lors même que $\varphi_1(x)$ n'est pas la derivee de $\varphi(x)$.