Nouvelles annales de mathématiques

# Baltzer

## Coordonnées obliques

*Nouvelles annales de mathématiques 1re série*, tome 13 (1854), p. 5-22

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1854_1_13__5_0>

# NOUVELLES ANNALES

DE

# MATHÉMATIQUES.

---

## COORDONNÉES OBLIQUES;

. D'APRÈS M. BALTZER,
Professeur au Gymnase de Dresde.

(Journal de M. Crelle, t. XLVI, p. 145; 1853.)

---

### A. *Coordonnées obliques; points et droites dans le plan.*

1. *Notations.* $x$, abscisse; $y$, ordonnée; $r$, distance du point (Q) à l'origine O; $xr$, angle que fait la direction $r$ avec $x$ positif, l'angle étant compté suivant un sens déterminé ; de sorte que

$$\text{angle } rx + \text{angle } xr = 0, \quad \sin rx + \sin xr = 0,$$
$$\cos rx - \cos xr = 0.$$

2. THÉORÈME. *Dans un polygone fermé, un côté est égal à la somme algébrique des projections des autres côtés sur ce côté.* — Théorème fondamental qu'on doit, je crois, à Carnot.

3. D'après ce théorème et cette notation, l'on a

$$r = x \cos xr + y \cos yr, \tag{1}$$

$$\left\{ \begin{aligned} r \cos xr &= x + y \cos xy, \\ r \cos yr &= x \cos xy + y. \end{aligned} \right. \tag{2}$$

d'où l'on tire

(3) $$\frac{x + y\cos xy}{\cos xr} = \frac{x\cos xy + y}{\cos yr} = r,$$

(4) $$r^2 = x^2 + 2xy\cos xy + y^2,$$

(5) $$\frac{\cos xr - \cos yr\cos xy}{x} = \frac{\cos yr - \cos xr\cos xy}{y} = \frac{\sin^2 xy}{r},$$

(6) $$\sin^2 xy = \cos^2 xr - 2\cos xr\cos yr\cos xy + \cos^2 yr.$$

4. *Angles d'une droite avec les axes.* Le rapport $x:y$ est constant pour tous les points de la droite OQ; ainsi

$$\frac{x}{y} = \frac{f}{g}, \quad gx - fy = 0,$$

est l'équation de la droite.

Nous désignons par $(fg)$ la direction de la droite; si l'on a

$$\frac{r}{\rho} = \frac{x}{f} = \frac{y}{g},$$

alors, à cause de l'équation (4),

$$\rho^2 = f^2 + 2fg\cos xy + g^2,$$

et

$$\frac{f + g\cos xy}{\cos xr} = \frac{f\cos xy + g}{\cos yr} = \rho^2,$$

ce qui donne les angles $xr$, $yr$, que fait la droite avec les axes.

5. *Normale.* Soient $gx - fy = h$ l'équation d'une droite, $g'x - f'y = 0$ l'équation de la perpendiculaire abaissée de l'origine sur la droite, et $n$ la longueur de cette perpendiculaire. On a, d'après le théorème (2), $x$, $y$ étant un point situé sur la droite donnée,

$$x\cos xn + y\cos yn = n;$$

équation qui doit être identique avec l'équation de la droite donnée, donc

$$\frac{g}{\cos xn} = \frac{-f}{\cos yn} = \frac{h}{n}, \quad \cos xn = \frac{ng}{h}, \quad \cos yn = \frac{-nf}{h};$$

l'équation (5), appliquée à la normale, donne

$$\frac{\cos xn - \cos yn \cos xy}{f'} = \frac{\cos yn - \cos xn \cos xy}{g'} = \frac{\sin^2 xy}{\rho'},$$

ou bien

$$\frac{g + f\cos xy}{f'} = -\frac{f + g\cos xy}{g'} = \frac{h}{n}\,\frac{\sin^2 xy}{\rho'},$$

ou

$$\rho'^2 = f'^2 + 2f'g'\cos xy + g'^2;$$

et l'équation (6) donne

$$\frac{h^2}{n^2}\sin^2 xy = g^2 + 2fg\cos xy + f^2 = \rho^2,$$

d'où

$$\frac{h}{n} = \frac{\rho}{\sin xy};$$

et réciproquement, les deux directions $(fg)$ et $(f'g')$ sont normales l'une à l'autre, lorsque

$$gg' + ff' + (fg' + gf')\cos xy = 0.$$

6. *Angle de deux droites.* Soient les droites $gx - fy = 0$; $g'x - f'y = 0$; $x$, $y$ un point de la première droite; $x'$, $y'$ un point de la seconde droite; $r^2 = x^2 + 2xy\cos xy + y^2$, $r'^2 = x'^2 + 2x'y'\cos xy + y'^2$; on a

$$r'\cos rr' = x'\cos xr + y'\cos yr \quad \text{(théorème 2)},$$

et, à l'aide de l'équation (3),

$$(7) \qquad rr'\cos rr' = x'x + y'y + (x'y + y'x)\cos xy;$$

ou bien, à l'aide de l'équation (5),

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin^2 xy \cos rr' = \cos xr \cos xr' + \cos yr \cos yr' \\ - (\cos yr \cos yr' + \cos xr' \cos yr')\cos xy, \end{array} \right.$$

on a

$$\frac{f}{x}=\frac{g}{y}=\frac{\rho}{r},\quad \frac{f'}{x'}=\frac{g'}{y'}=\frac{\rho'}{r'},$$

ou

$$\rho^2=f^2+2fg\cos xy+g^2,\quad \rho'^2=f'^2+2f'g'\cos xy+g'^2;$$

substituant, dans l'équation (7), on trouve

$$\rho\rho'\cos rr'=ff'+gg'+(fg'+gf')\cos xy.$$

On parvient au même résultat en substituant, dans l'équation (7), ayant égard aux équations (3),

$$\frac{f+g\cos xy}{\cos xr}=\frac{f\cos xy+y}{\cos yr}=\rho,$$

$$\frac{f'+g'\cos xy}{\cos x'r}=\frac{f'\cos xy+y'}{\cos y'r}=\rho';$$

faisant $rr'=\frac{\pi}{2}$, on revient à la formule des directions normales.

7. *Distance d'une droite à l'origine.* Soient l'équation de la droite $gx-fy=h$; $n$ la distance de cette droite à l'origine; on a, comme ci-dessus (§ 5),

$$n=\frac{h\sin xy}{\rho}.$$

8. *Distance d'une droite à un point quelconque.* Soient la même droite et un point $(x_1, y_1)$, et $n_1$ la distance cherchée; on trouve facilement

$$n_1=\frac{(h-gx_1-fy_1)\sin xy}{\rho}.$$

## B. *Points, droites, plans dans l'espace.*

9. *Notation.*

$$\mathrm{OP}=x,\quad \mathrm{PQ}=y,\quad \mathrm{QR}=z,$$

coordonnées des points R; $\mathrm{OR}=r$.

**10.** On a

$$(1)\qquad r = x\cos xr + y\cos yr + z\cos zr,$$

$$(2)\left\{\begin{array}{l} r\cos xr = x + y\cos xy + z\cos zx \\ r\cos yr = x\cos xy + y + z\cos yz \\ r\cos zr = x\cos zx + y\cos yz + z \end{array}\right\}\text{[théorème 2];}$$

de là

$$(3)\left\{\begin{array}{l} \dfrac{x + y\cos xy + z\cos zx}{\cos xr} \\ = \dfrac{x\cos xy + y + z\cos yz}{\cos yz} \\ = \dfrac{x\cos zx + y\cos yz + z}{\cos zr} = r. \end{array}\right.$$

Les équations (1) et (2) donnent

$$(4)\quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy\cos xy + 2yz\cos yz + 2zx\cos zx.$$

On déduit, des équations (2),

$$(5)\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\sin^2 yz\cos xr - \gamma\cos yr - \beta\cos zr}{x} \\ = \dfrac{\sin^2 zx\cos yr - \alpha\cos zr - \gamma\cos xr}{y} \\ = \dfrac{\sin^2 xy\cos zr - \beta\cos xr - \alpha\cos yr}{z} = \dfrac{\delta^2}{r}, \end{array}\right.$$

ou

$$\alpha = \cos yz - \cos zx\cos yz,$$
$$\beta = \cos zx - \cos xy\cos yz,$$
$$\gamma = \cos xy - \cos yz\cos zx,$$
$$\delta^2 = 1 + 2\cos xy\cos yz\cos zx - \cos^2 xy - \cos^2 yz - \cos^2 zx.$$

Substituant pour $x$, $y$, $z$, $r$, leurs valeurs proportionnelles dans l'équation (1), on obtient

$$(6)\left\{\begin{array}{l} \delta^2 = \sin^2 yz\cos^2 xr + \sin^2 zx\cos^2 yr + \sin^2 xy\cos^2 zr \\ \quad - 2\gamma\cos xr\cos yr - 2\beta\cos zr\cos xr - 2\alpha\cos yr\cos zr. \end{array}\right.$$

Dans le trièdre formé par les axes, soit

X l'angle dièdre opposé à $yz$,
Y l'angle dièdre opposé à $zx$,
Z l'angle dièdre opposé à $xy$,

on a (Trigonométrie sphérique)

$$(7)\qquad \begin{cases} \alpha = \sin zx \sin xy \cos X, \\ \beta = \sin xy \sin yz \cos Y, \\ \gamma = \sin yz \sin zx \cos Z; \end{cases}$$

$$(8)\qquad \begin{cases} \delta^2 = \sin^2 zx \sin^2 xy \sin^2 X, \\ \quad = \sin^2 xy \sin^2 yz \sin^2 Y, \\ \quad = \sin^2 yz \sin^2 zx \sin^2 Z, \\ \quad = 4 \sin\frac{1}{2}(xy + yz + zx) \sin\frac{1}{2}(xy + yz - zx) \\ \qquad \sin\frac{1}{2}(yz + zx - xy) \sin\frac{1}{2}(zx + xy - yz); \end{cases}$$

de là

$$\frac{\cot X}{\alpha} = \frac{\cot Y}{\beta} = \frac{\cot Z}{\gamma} = \frac{1}{\delta}.$$

11. *Volume du parallélipipède des axes.* Si l'on prend, à partir de l'origine, une longueur égale à l'unité sur les trois axes, et qu'on achève le parallélipipède, le volume est égal à $\delta$; élevant à l'origine les droites $x'$, $y'$, $z'$ respectivement perpendiculaires aux plans $yz$, $zx$, $xy$, on aura

$$(9)\qquad \delta = \sin xy \cos zz' = \sin yz \cos xx' = \sin zx \cos yy'.$$

12. Par le point R, menons un plan perpendiculaire à OR; soient K, L, M les points d'intersection de ce plan, avec les axes $x$, $y$, $z$ : on a

$$\text{KLM} \cos xr = \text{OLM} \cos x'x, \text{ etc.};$$

d'où

$$(10)\quad \text{OLM}.\frac{\cos x'x}{\cos xr} = \text{OMK}.\frac{\cos y'y}{\cos yr} = \text{OKL}.\frac{\cos z'z}{\cos zr} = \text{KLM},$$

et de là, au moyen de l'équation (9),

$$(11)\quad \frac{\mathrm{OLM}}{\sin yz \cos xr} = \frac{\mathrm{OMK}}{\sin zx \cos yr} = \frac{\mathrm{OKL}}{\sin xy \cos zr} = \frac{\mathrm{KLM}}{\delta}.$$

Cette équation, combinée avec les équations (6) et (7), donne

$$(12)\quad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{KLM}^2 = \mathrm{OLM}^2 + \mathrm{OMK}^2 + \mathrm{OKL}^2 \\ -\, 2.\mathrm{OLM}.\mathrm{OMK}.\cos \mathrm{Z} - 2\,\mathrm{OMK}.\mathrm{OKL}.\cos \mathrm{X} \\ -\, 2.\mathrm{OKL}.\mathrm{OLM}.\cos \mathrm{Y}; \end{array}\right.$$

on a

$$x \cos x'x = r \cos x'r, \text{ etc.};$$

d'où

$$(13)\quad \frac{x \cos x'x}{\cos x'r} = \frac{y \cos y'y}{\cos y'r} = \frac{z \cos z'z}{\cos z'r} = r.$$

Les accents désignent, comme ci-dessus, des perpendiculaires aux plans coordonnés.

13. *Équation d'une droite*

$$\frac{x}{f} = \frac{y}{g} = \frac{z}{h};$$

$f$, $g$, $h$ donnent la direction de la droite, et nous désignons une telle droite donnée de direction par $(fgh)$.

14. *Angles d'une droite avec les axes.*

Si l'on a

$$\frac{x}{f} = \frac{y}{g} = \frac{z}{h} = \rho,$$

on aura, d'après l'équation (4),

$$\rho^2 = f^2 + g^2 + h^2 + 2fg \cos xy + 2gh \cos yz + 2hf \cos zx;$$

et, d'après les équations (3),

$$\frac{f + g \cos xy + h \cos zx}{\cos xr} = \frac{g + h \cos yz + f \cos xy}{\cos yr}$$
$$= \frac{h + f \cos zx + g \cos yz}{\cos zr} = \rho.$$

15. *Équation d'un plan.* Soit un plan perpendiculaire en R sur OR et OR $= r$; soit R′ un point quelconque du plan ayant les coordonnées $x'$, $y'$, $z'$: projetant orthogonalement sur OR la ligne brisée OP′Q′R′ formée par les coordonnées de R′, on a

$$x' \cos xr + y' \cos yr + z' \cos zr = r$$

pour équation du plan.

Ainsi, si l'on a pour équation d'un plan

$$Ax + By + Cz = D,$$

alors

$$\frac{A}{\cos xr} = \frac{B}{\cos yr} = \frac{C}{\cos zr} = \frac{D}{r},$$

où $r$ est la distance de l'origine au plan, $xr$ l'angle de l'axe des $x$ avec cette distance, etc. Nous désignons par (ABC) un tel plan donné de direction.

Si $(fgh)$ est la direction de cette normale $r$, on a, d'après les équations (5),

$$\frac{A \sin^2 yz - \gamma B - \beta C}{f} = \frac{B \sin^2 zx - \alpha C - \gamma A}{g}$$
$$= \frac{C \sin^2 xy - \beta A - \alpha B}{h} = \frac{\delta^2 D}{r\rho};$$

et, d'après l'équation (6),

$$\frac{\delta^2 D^2}{r^2} = A^2 \sin^2 yz + B^2 \sin^2 zx + C^2 \sin^2 xy$$
$$- 2AB\gamma - 2BC\alpha - 2CA\beta = \sigma^2,$$
$$\frac{D}{r} = \frac{\sigma}{\delta}.$$

16. *Condition pour qu'une direction $(fgh)$ soit contenue dans un plan* (ABC).

$$\frac{x}{f} = \frac{y}{g} = \frac{z}{h}, \quad \text{équation de la droite,}$$

$$Ax + By + Cz = 0, \quad \text{équation du plan;}$$

on a, pour équation de condition,

$$Af + Bg + Ch = 0.$$

**17.** *Condition pour que deux directions* $(fgh)$, $(f'g'h')$ *soient dans un plan* (ABC).

$$\frac{x}{f} = \frac{y}{g} = \frac{z}{h}, \quad \text{équation de la première direction;}$$

$$\frac{x}{f'} = \frac{y}{g'} = \frac{z}{h'}, \quad \text{équation de la deuxième direction;}$$

$$Ax + By + Cz = 0, \quad \text{équation du plan;}$$

on a

$$\frac{gh' - g'h}{A} = \frac{hf' - h'f}{B} = \frac{fg' - f'g}{C}.$$

**18.** *Condition pour qu'une direction* $(fgh)$ *soit dans deux plans* (ABC), (A′B′C′).

$$\left.\begin{array}{l} Ax + By + Cz = 0 \\ A'x + B'y + C'z = 0 \end{array}\right\}, \quad \text{équations des deux plans;}$$

$$\frac{x}{f} = \frac{y}{g} = \frac{z}{h}, \quad \text{direction;}$$

$$\frac{BC' - B'C}{f} = \frac{CA' - C'A}{g} = \frac{AB' - A'B}{h}.$$

**19.** *Condition pour qu'une direction* $(fgh)$ *soit normale à un plan* (ABC). La direction $(fgh)$ est perpendiculaire au plan (ABC), lorsque (§ 15)

$$\frac{A\sin^2 yz - \gamma B - \beta C}{f} = \frac{B\sin^2 zx - \alpha C - \gamma A}{g}$$
$$= \frac{C\sin^2 xy - \beta A - \alpha B}{h} = \frac{\delta\sigma}{\rho};$$

ou bien encore, ayant égard aux §§ 14 et 15,

$$\frac{f + g\cos xy + h\cos zx}{A} = \frac{g + h\cos yz + f\cos xy}{B}$$
$$= \frac{h + f\cos zx + g\cos yz}{C} = \rho\frac{\delta}{\sigma};$$

d'où l'on tire

$$Af + Bg + Ch = \rho \frac{\sigma}{\delta};$$

les valeurs de $\rho$, $\sigma$, $\delta$ sont données ci-dessus (p. 9, 11, 12).

**20.** *Condition pour qu'une direction* $(fgh)$ *soit normale à la direction* $(f'g'h')$.

Il faut que la direction $(f'g'h')$ soit dans le plan normal à la direction $(fgh)$; donc, ayant égard aux §§ 16 et 19,

$$\begin{aligned} f'f + g'g + h'h + (f'g + fg')\cos xy \\ + (g'h + gh')\cos yz + (h'f + hf')\cos zx = 0. \end{aligned}$$

**21.** *Condition pour qu'un plan* (ABC) *soit perpendiculaire au plan* (A'B'C'). Le plan (A'B'C') est perpendiculaire au plan (ABC) lorsqu'il contient la normale à ABC; donc, ayant égard aux §§ 16 et 19,

$$\begin{aligned} AA'\sin^2 yz + BB'\sin^2 zx + CC'\sin^2 xy - \gamma\,(A'B + AB') \\ - \alpha\,(B'C + BC') - \beta\,(C'A + CA') = 0. \end{aligned}$$

**22.** *Angle de deux droites.*

Soient la droite $(fgh)$ et la droite $(f'g'h')$; il s'agit de trouver l'angle ROR'; on a

$$(14)\quad \begin{cases} r'\cos rr' = x'\cos xr + y'\cos yr + z'\cos zr, \\ r\cos r'r = x\cos xr' + y\cos yr' + z\cos zr'. \end{cases}$$

$x'$, $y'$, $z'$ sont relatifs au point R'; d'où, ayant égard à l'équation (13),

$$(15)\quad \begin{cases} \cos rr' = \dfrac{\cos xr \cos x'r'}{\cos xx'} + \dfrac{\cos yr \cos y'r'}{\cos yy'} + \dfrac{\cos zr \cos z'r'}{\cos zz'}, \\ \phantom{\cos rr'} = \dfrac{\cos xr' \cos x'r}{\cos xx'} + \dfrac{\cos yr' \cos y'r}{\cos yy'} + \dfrac{\cos zr' \cos z'r}{\cos zz'}; \end{cases}$$

ici $x'$, $y'$, $z'$ sont des axes normaux aux plans $yz$, $zx$, $xy$ (§ 11) : éliminant, de l'une des équations (14), les cosinus au moyen des équations (3), on a

$$(16)\quad \begin{cases} rr'\cos rr' = xx' + yy' + zz' + (xy' + x'y)\cos xy \\ \qquad + (yz' + y'z)\cos yz + (zx' + z'x)\cos zx; \end{cases}$$

ou bien, éliminant des équations (14), les $x$, $y$, $z$, $r$ à l'aide des équations (5),

$$(17)\left\{\begin{aligned}\delta^2\cos rr' = &+\sin^2 yz\cos xr\cos xr' + \sin^2 zx\cos yr\cos yr'\\ &+\sin^2 xy\cos zr\cos zr'\\ &-\gamma(\cos xr\cos yr' + \cos xr'\cos yr)\\ &-\alpha(\cos yr\cos zr' + \cos yr'\cos zr)\\ &-\beta(\cos zr\cos xr' + \cos zr'\cos xr);\ (*)\end{aligned}\right.$$

or,

$$\frac{x}{f}=\frac{y}{g}=\frac{z}{h}=\frac{r}{\rho},$$
$$\frac{x'}{f'}=\frac{y'}{g'}=\frac{z'}{h'}=\frac{r'}{\rho'};$$

donc, d'après l'équation (16),

$$\begin{aligned}\rho\rho'\cos rr' = ff' + gg' + hh' &+ (fg' + gf')\cos xy\\ &+ (gh' + hg')\cos yz + (hf' + fh')\cos zx.\end{aligned}$$

Si $\cos rr' = 0$, on revient au résultat du § 20.

23. *Angle de deux plans* (ABC) et (A′B′C′).

Soient $r$ et $r'$ les perpendiculaires respectives à ces plans ; on a

$$\frac{A}{\cos xr}=\frac{B}{\cos yr}=\frac{C}{\cos zr}=\frac{\sigma}{\delta},$$
$$\frac{A'}{\cos xr'}=\frac{B'}{\cos yr'}=\frac{C'}{\cos zr'}=\frac{\sigma'}{\delta};$$

de là et de l'équation (17), on tire

$$\begin{aligned}\sigma\sigma'\cos rr' &= AA'\sin^2 yz + BB'\sin^2 zx + CC'\sin^2 xy\\ &-\gamma(AB' + A'B) - \alpha(BC' + B'C) - \beta(CA' + C'A).\end{aligned}$$

24. *Angle d'une droite* ($f'g'h'$) *avec le plan* (ABC).

(*) Les formules (15), (16), (17) et la méthode pour les trouver, sont de M. Sturm. (GERGONNE, *Ann.*, t. XV, p. 330.)

Soit $(fgh)$ la direction normale à ABC (§ 15),

$$\frac{A}{\cos xr} = \frac{B}{\cos yr} = \frac{C}{\cos zr} = \frac{\sigma}{\delta},$$

$$\frac{x'}{f'} = \frac{y'}{g} = \frac{z'}{h'} = \frac{r'}{\rho'};$$

par conséquent, d'après l'équation (14),

$$\frac{\sigma\rho'}{\delta} \cos rr' = Af' + Bg' + Ch'.$$

25. *Distance d'un point à un plan.*

$r$, distance; $Ax + By + Cz = D$, équation du plan; $x_1, y_1, z_1$, coordonnées du point;

$$r = (D - Ax_1 - By_1 - Cz_1)\frac{\delta}{\sigma}.$$

26. Si l'on a

$$gx - fy = H,$$
$$hy - gz = F,$$
$$fz - hx = G,$$

où F, G, H sont des constantes qui déterminent la position, tandis que $f$, $g$, $h$ donnent la direction d'une droite; si l'on a

$$Ff + Gg + Hh = 0,$$

cette droite est évidemment dans le plan

$$Fx + Gy + Hz = 0.$$

27. *Condition pour qu'une droite soit contenue dans un plan.*

Soit la droite donnée par les équations du § 26 et

$$Ax + By + Cz = D, \quad \text{l'équation du plan,}$$

le plan

$$v(gx - fy - H) = hy - gz - F,$$

où $\nu$ est un paramètre arbitraire, contient la droite; identifiant, on a

$$\frac{\nu}{A} = -\frac{\nu f + h}{gB} = \frac{1}{C} = \frac{\nu H - F}{Dg},$$

d'où

$$D = \frac{AH - CF}{g} = \frac{BF - AG}{h} = \frac{CG - BH}{f},$$

$$Ff + Gg + Hh = 0, \quad Af + Bg + Ch = 0.$$

28. *Condition pour qu'un point et une droite soient dans un plan.*

Équations de la droite et du plan comme au § 27, $x_1$, $y_1$, $z_1$ coordonnées du point; on a

$$\frac{hy_1 - gz_1 - F}{A} = \frac{fz_1 - hx_1 - G}{B} = \frac{gx_1 - fy_1 - H}{C}$$
$$= \frac{-(Fx_1 + Gy_1 + Hz_1)}{D}.$$

29. *Condition pour qu'un plan contienne deux droites parallèles.*

On aura

$$\nu(gx - fy - H') = hy - gz - F';$$

les accents se rapportent à la seconde droite parallèle à la première, d'où

$$\nu(H' - H) = F' - F,$$

$$\frac{F' - F}{A} = \frac{G' - G}{B} = \frac{H' - H}{C} = \frac{HF' - H'F}{gD},$$

et, au moyen des relations ci-dessus,

$$\frac{HF - H'F}{g} = \frac{FG' - F'G}{h} = \frac{GH' - G'H}{f}.$$

30. *Condition pour qu'un plan contienne une droite et soit parallèle à une autre droite.*

La droite $(efg)$ est contenue dans $(ABC)$, donc

$$Af + Bg + Ch = 0;$$

la droite $(f'g'h')$ est dans le plan $(A'B'C')$, donc

$$A'f' + B'f' + C'g' = 0;$$

mais ces deux plans doivent être parallèles, d'où

$$\frac{A'}{C'} = \frac{A}{C}, \quad \frac{B'}{C'} = \frac{B}{C}, \quad \frac{A}{C} = \frac{gh' - g'h}{fg' - f'g}, \quad \frac{B}{C} = \frac{hf' - h'f}{fg' - f'g},$$

$$\frac{D}{C} = \frac{H.\frac{A}{C} - F}{g} = \frac{Ff' + Gg' + Hh'}{fg' - f'g};$$

car

$$Ff + Hh = -Gg,$$

$$\frac{D'}{C'} = \frac{F'f + G'g + H'h}{f'g - g'f}.$$

31. *Condition pour que deux droites soient dans un même plan.*

Il faut que les plans $(ABC)$, $(A'B'C')$ se confondent; donc

$$\frac{D}{C} = \frac{D'}{C'},$$

ou bien

$$Ff' + F'f + Gg' + G'g + Hh' + H'h = 0.$$

32. *Distance d'une droite à un plan parallèle à cette droite.*

Soient $(fgh)$ la droite, $(ABC)$ le plan, et $(A'B'C')$ le plan passant par $(fgh)$ et parallèle à $(ABC)$; la distance de $(ABC)$ à $(A'B'C')$ est la distance cherchée; or cette distance est

$$(D - D')\frac{\delta}{\sigma}, \quad \text{et} \quad D' = \frac{AH - CF}{g} \quad (\S\S\ 27 \text{ et } 29),$$

donc la distance cherchée (§ 25),

$$s = \frac{(gD - AH + CF)\delta}{g\sigma}.$$

33. *Plus courte distance de deux droites non dans un même plan.*

Soient $(fgh)$, $(f'g'h')$ les deux droites, (ABC), (A'B'C') deux plans parallèles, le premier passant par $(efg)$, et le second par $(e'f'g')$; la distance de ces deux plans est la distance cherchée : donc

$$s=(\mathrm{D}-\mathrm{D}')\frac{\delta}{\sigma},\quad \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{C}}=\frac{\mathrm{F}f'+\mathrm{G}g'+\mathrm{H}h'}{fg'-gf'},$$

$$\frac{\mathrm{D}'}{\mathrm{C}'}=-\frac{\mathrm{F}'f+\mathrm{G}'g+\mathrm{H}'h}{fg'-gf'};$$

donc

$$s=(\mathrm{F}f'+\mathrm{F}'f+\mathrm{G}g'+\mathrm{G}'g+\mathrm{H}h'+\mathrm{H}'h)\frac{\delta}{\sigma}.$$

34. *Distance d'un point à une droite.*

Soient $x_1$, $y_1$, $z_1$ les coordonnées du point, $(fgh)$ la droite, (A'B'C') un plan passant par le point et la droite; on a donc

$$\frac{hy_1-gz_1-\mathrm{F}}{\mathrm{A}'}=\frac{fz_1-hx_1-\mathrm{G}}{\mathrm{B}'}=\frac{gx_1-fy_1-\mathrm{H}}{\mathrm{C}'}.$$

Soit $(f'g'h')$ une perpendiculaire au plan (A'B'C'); on a (§ 19)

$$\frac{\mathrm{A}'\sin^2 yz-\gamma\mathrm{B}'-\beta\mathrm{C}'}{f'}=\frac{\mathrm{B}'\sin^2 zx-\alpha\mathrm{C}'-\gamma\mathrm{A}'}{g'}$$
$$=\frac{\mathrm{C}'\sin^2 xy-\beta\mathrm{A}'-\alpha\mathrm{B}'}{h'}.$$

Soit (ABC) un plan passant par $(fgh)$ parallèlement à $(f'g'h')$, on a

$$\frac{gh'-g'h}{\mathrm{A}}=\frac{hf'-h'f}{\mathrm{B}}=\frac{fg'-f'g}{\mathrm{C}}=\frac{\mathrm{F}f'+\mathrm{G}g'+\mathrm{H}h'}{\mathrm{D}},$$

$$s=(\mathrm{D}-\mathrm{A}x_1-\mathrm{B}y_1-\mathrm{C}z_1)\frac{\delta}{\sigma}\quad (\S\ 25);$$

on met pour A, B, C, D leurs valeurs proportionnelles.

35. *Distance des deux parallèles $(fgh)$, $(f'g'h')$.*

Soit $(A''B''C'')$ le plan passant par les deux droites, on a

$$\frac{F'-F}{A''} = \frac{G'-G}{B''} = \frac{H'-H}{C''} \quad (\S\ 29).$$

Soit $(f''g''h'')$ une perpendiculaire au plan $(A''B''C'')$, on a

$$\frac{A''\sin^2 yz - \gamma B'' - \beta C''}{f''} = \frac{B''\sin^2 zx - \alpha C'' - \gamma A''}{g''}$$
$$= \frac{C''\sin^2 xy - \beta A'' - \alpha B''}{h''}.$$

Pour $(ABC)$ passant par $(fgh)$, et pour $(A'B'C')$ passant par $(f'g'h')$, tous deux parallèlement à la normale $(f''g''h'')$, on a

$$\frac{gh''-g''h}{A} = \frac{hf''-h''f}{B} = \frac{fg''-f''g}{C} = \frac{Ff''+Gg''+Hh''}{D}$$
$$= \frac{F'f''+G'g''+H'h''}{D'};$$

donc

$$s = [(F-F')f'' + (G-G')g'' + (H-H')h'']\frac{\delta}{\sigma}.$$

36. *Une droite* $(f''g''h'')$ *passant par un point* $(x_1y_1z_1)$ *perpendiculairement à la droite* $(fgh)$.

Soient $(A'B'C')$ le plan passant par le point, et la droite $(fgh)$; on a

$$\frac{hy_1-gz_1-F}{A'} = \frac{fz_1-hx_1-G}{B'} = \frac{gx_1-fy_1-H}{C'};$$

le plan $(ABC)$, perpendiculaire à $(fgh)$, donne

$$\frac{f+g\cos xy+h\cos zx}{A} = \frac{g+h\cos yz+f\cos xy}{B}$$
$$= \frac{h+f\cos zx+g\cos yz}{C},$$

d'où

$$\frac{BC'-B'C}{f''} = \frac{CA'-C'A}{g''} = \frac{AB'-A'B}{h''}.$$

37. *Une droite* $(f''g''h'')$ *coupant normalement les droites parallèles* $(fgh)$, $(f'g'h')$.

Le plan $(A'B'C')$ des deux droites parallèles donne

$$\frac{F'-F}{A'}=\frac{G'-G}{B'}=\frac{H'-H}{C'}=\frac{HF'-H'F}{gD'};$$

le plan $(ABC)$, perpendiculaire à $(fgh)$, donne

$$\frac{f+g\cos xy+h\cos zx}{A}=\frac{g+h\cos yz+f\cos xy}{B}$$
$$=\frac{h+f\cos zx+g\cos yz}{C},$$

d'où

$$\frac{BC'-B'C}{f''}=\frac{CA'-C'A}{g''}=\frac{AB'-A'B}{h''};$$

la droite $(f''g''h'')$ est dans $(A'B'C')$ si l'on a

$$D'=\frac{A'H''-C'F''}{g},$$

ou si

$$H''(F'-F)-F''(H'-H)=\frac{g''}{g}(HF'-H'F).$$

38. *Droite* $(f''g''h'')$ *normale aux deux droites* $(fgh)$, $(f'g'h')$.

Le plan $(ABC)$ contenant les deux directions $(fgh)$ et $(f'g'h')$, on a

$$\frac{gh'-g'h}{A}=\frac{hf'-h'f}{B}=\frac{fg'-f'g}{C};$$

$(f''g''h'')$, normale à $(ABC)$, donne

$$\frac{A\sin^2 yz-\gamma B-\beta C}{f''}=\frac{B\sin^2 zx-\alpha C-\gamma A}{g''}$$
$$=\frac{C\sin^2 xy-\beta A-\alpha B}{h''}.$$

Les droites $(fgh)$ et $(f''g''h'')$ doivent être dans un même plan; de même $(f'g'h')$ et $(f''g''h'')$ donnent

$$F''f + Ff'' + G''g + Gg'' + Hh'' + hH'' = 0,$$
$$F''f' + F'f'' + G''g' + G'g'' + H''h' + H'h'' = 0;$$

et l'on a aussi

$$F''f'' + G''g'' + H''h'' = 0;$$

ainsi $F''$, $G''$, $H''$ sont connus, ainsi que $f''$, $g''$, $h''$.

*Observation.* Aucun Traité, à ce que je sache, ne donne ces formules élémentaires d'une application si fréquente. M. le D[r] J.-G.-H. Swellenbach, de Bonn, vient de publier un ouvrage in-4° de 221 pages, sur *neuf* systèmes de coordonnées dont il étudie et compare les propriétés. Nous y reviendrons.