ANGELO GENOCCHI

Remarques sur un théorème de M. Brioschi et sur la question 267 (voir t. XI, p. 402, et t. XII, p. 167)

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 13 (1854), p. 429-432

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1854_1_13__429_0>

REMARQUES SUR UN THÉORÈME DE M. BRIOSCHI ET SUR LA QUESTION 267

(voir t. XI, p. 402, et t. XII, p. 167);

PAR M. ANGELO GENOCCHI.

Soient $A_1, \ldots, A_5$ cinq points situés sur un ellipsoïde; A_r l'un quelconque d'entre eux; v_r le volume du tétraèdre ayant pour sommets les quatre autres points; M un sixième point; D_r le demi-diamètre de l'ellipsoïde parallèle à MA_r; d_r la distance MA_r : on aura

$$\sum \pm \frac{d_r^2}{D_r^2} v_r = 0.$$

M. Brioschi a donné ce théorème en supposant le point M situé aussi sur l'ellipsoïde, et il a remarqué que, dans le cas d'une sphère, le théorème a lieu quoique M ne soit pas un point de la surface. Il est facile de démontrer que cette observation doit être étendue au cas d'un ellipsoïde quelconque. Soient, en effet,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

l'équation de l'ellipsoïde, et

$$y = px, \qquad z = qx,$$

celles du demi-diamètre D_r : les coordonnées de l'extrémité de D_r seront

$$x = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{a^2} + \frac{p^2}{b^2} + \frac{q^2}{c^2}\right)}}, \quad y = \frac{p}{\sqrt{\left(\frac{1}{a^2} + \frac{p^2}{b^2} + \frac{q^2}{c^2}\right)}},$$

$$z = \frac{q}{\sqrt{\left(\frac{1}{a^2} + \frac{p^2}{b^2} + \frac{q^2}{c^2}\right)}}.$$

Par suite, on aura

$$D_r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1 + p^2 + q^2}{\frac{1}{a^2} + \frac{p^2}{b^2} + \frac{q^2}{c^2}},$$

ou

$$\frac{1}{a^2} + \frac{p^2}{b^2} + \frac{q^2}{c^2} = \frac{1 + p^2 + q^2}{D_r^2}.$$

Or, si α, β, γ sont les coordonnées du point M, et x_r, y_r, z_r celles de A_r, on aura

$$d_r^2 = (\alpha - x_r)^2 + (\beta - y_r)^2 + (\gamma - z_r)^2;$$

de plus, D_r et MA_r étant parallèles, il s'ensuit

$$p = \frac{\beta - y_r}{\alpha - x_r}, \qquad q = \frac{\gamma - z_r}{\alpha - x_r}:$$

donc l'équation précédente deviendra

$$\frac{(\alpha - x_r)^2}{a^2} + \frac{(\beta - y_r)^2}{b^2} + \frac{(\gamma - z_r)^2}{c^2} = \frac{d_r^2}{D_r^2}.$$

On voit que cette formule a lieu quelles que soient les positions des points M et A_r. En supposant que A_r soit sur l'ellipsoide, et faisant

$$\rho = 1 + \frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2},$$

nous trouvons

$$\rho - \frac{2\alpha}{a^2} x_r - \frac{2\beta}{b^2} y_r - \frac{2\gamma}{c^2} z_r = \frac{d_r^2}{D_r^2},$$

qui représente cinq équations correspondant à

$$r = 1, 2, \ldots, 5,$$

entre les quatre mêmes quantités

$$\rho, -\frac{2\alpha}{a^2}, -\frac{2\beta}{b^2}, -\frac{2\gamma}{c^2} \; (*).$$

(*) C'est sans doute par inadvertance que M. Brioschi nomme, parmi les quatre inconnues, l'expression $\frac{1}{2}\frac{dr}{D_r^2}$ qui, variant d'une équation à l'autre, représente cinq quantités, et qui reparaît dans le déterminant.

Leur déterminant, que je désignerai par

$$\text{dét.}\left(1,\ x_r,\ y_r,\ z_r,\ \frac{d_r^2}{D_r^2}\right),$$

sera donc nul, et, en le développant, on aura

$$\sum \pm \frac{d_r^2}{D_r^2}\ \text{dét.}\,(1,\ x_{r'},\ y_{r'},\ z_{r'}) = 0,$$

où r' désigne ceux des nombres $1, 2, \ldots 6$, qui sont différents de r. Mais comme

$$v_r = \frac{1}{6}\ \text{dét.}\,(1,\ x_{r'},\ y_{r'},\ z_{r'}),$$

on conclut

$$\sum \pm \frac{d_r^2}{D_r^2}\, v_r = 0.$$

Pour la sphère, on a

$$\sum \pm v_r\, d_r^2 = 0,$$

et si le point M coïncide avec A_s, il en résulte

$$v_1\, d_1^2 - v_2\, d_2^2 + v_3\, d_3^2 - v_4\, d_4^2 = 0,$$

puisque $d_s = 0$. Cette équation particulière a été donnée par M. Bellavitis dans les *Annali* de M. Tortolini, 1853, page 204. M. Bellavitis croit que la relation

$$\sum v_r\, d_r = 0,$$

analogue aux précédentes, et qui forme le sujet de la question 267, est erronée. Il me semble que son opinion peut être justifiée, en considérant un cas particulier très-simple, celui où les points A_1, A_2, A_3, A_4 seraient les sommets d'un quadrilatère plan rectangle. Dans ce cas, le tétraèdre v_r s'évanouit, et les autres v_1, v_2, v_3, v_4

sont équivalents, comme ayant pour hauteur commune la distance de A_s au plan du rectangle $A_1 A_2 A_3 A_4$, et pour base la moitié de ce rectangle. La relation

$$\sum \pm v_r d_r^2 = 0,$$

qui a lieu pour la sphère, devient donc

$$d_1^2 - d_2^2 + d_3^2 - d_4^2 = 0,$$

et en même temps la relation

$$\sum v_r d_r = 0,$$

donnera

$$d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = 0.$$

Or il est aisé de se convaincre que ces deux équations ne peuvent subsister ensemble pour toutes les positions du point M sur la sphère, car les distances d_1, d_2, d_3, d_4 devraient être égales deux à deux, et, par conséquent, le point M serait situé sur un plan diamétral perpendiculaire à deux côtés parallèles du rectangle $A_1 A_2 A_3 A_4$.