ANGELO GENOCCHI

Démonstration de quelques propositions d'arithmétique d'après Euclide

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 13 (1854), p. 426-428

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1854_1_13__426_0>

DÉMONSTRATION DE QUELQUES PROPOSITIONS D'ARITHMÉTIQUE D'APRÈS EUCLIDE;

PAR M. ANGELO GENOCCHI.

Une propriété des nombres, dont on ne peut se passer même dans les éléments, c'est que *le produit de deux nombres premiers avec un troisième est premier avec ce troisième nombre.* Pour l'établir, je donne la préférence à la démonstration d'Euclide, qui me paraît la plus simple, et qu'on abrége beaucoup par l'emploi des notations modernes. Il est vrai qu'on a besoin de prouver d'abord quelques autres propositions; mais celles-ci ne sont pas sans intérêt : au contraire, je les crois essentielles dans la théorie de la réduction des fractions. Cette démonstration revient à ce qui suit.

1. Si $\frac{a}{b}$ est la plus simple des fractions équivalentes à une fraction déterminée $\frac{p}{q}$, a sera un diviseur de p, et b un diviseur de q.

Démonstration. Si a est un diviseur de p, on aura

$$p = ma,$$

m étant entier; mais

$$\frac{a}{b} = \frac{p}{q},$$

et, par suite,

$$\frac{a}{b} = \frac{ma}{q},$$

d'où

$$q = mb:$$

donc b sera aussi un diviseur de q. Si a n'est pas un diviseur de p, divisons p par a, et soient m le quotient, a' le reste : nous aurons

$$p = ma + a',$$

et comme $\frac{q}{b} = \frac{p}{a}$, il s'ensuivra

$$\frac{q}{b} = m + \frac{a'}{a}.$$

Or, la fraction $\frac{a'}{a}$ étant inférieure à l'unité, il est clair qu'en divisant q par b on obtiendra m pour quotient entier avec un reste $b' < b$, et qu'ainsi

$$\frac{q}{b} = m + \frac{b'}{b}.$$

En comparant les deux valeurs de $\frac{q}{b}$, on a

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b}, \quad \text{ou} \quad \frac{a'}{b'} = \frac{a}{b} = \frac{p}{q}:$$

on trouverait donc une fraction $\frac{a'}{b'}$ équivalente à $\frac{p}{q}$ et plus simple que $\frac{a}{b}$.

2. Si p et q sont deux nombres premiers entre eux, $\frac{p}{q}$ sera la plus simple de toutes les fractions ayant même valeur.

Car, si la plus simple était une autre fraction $\frac{a}{b}$, a serait un diviseur de p, et b un diviseur de q (1), et l'on aurait

$$p = ma, \qquad q = mb,$$

m étant un entier supérieur à l'unité : par conséquent, p et q auraient un facteur commun m.

3. Si b est premier avec a, b sera premier avec tout nombre c diviseur de a.

En effet, si b et c avaient un facteur commun d, ce facteur diviserait exactement a qui est un multiple de c : on aurait donc

$$b = md, \qquad a = nd,$$

et d serait un diviseur commun de a et b.

4. Si a et b sont premiers avec c, leur produit $ab = p$ sera aussi premier avec c.

Démonstration. Supposons que p et c aient un diviseur commun q ; a, premier avec c, sera premier avec q diviseur de c (3), et, d'ailleurs, on aura

$$p = mq,$$

m étant entier, ou

$$ab = mq,$$

d'où

$$\frac{a}{q} = \frac{m}{b}.$$

Donc $\frac{a}{q}$ sera la plus simple des fractions équivalentes à $\frac{m}{b}$ (2); donc q sera un diviseur de b (1). Ainsi b et c auraient un diviseur commun q, tandis qu'ils sont donnés comme premiers entre eux.

Ces quatre théorèmes coïncident, dans le même ordre, avec les propositions 21, 23, 25, 26 du VII[e] livre d'Euclide, et je n'ai changé que la démonstration du premier théorème. Le troisième pourrait être omis comme assez évident.