π exprimé en 333 chiffres

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 13 (1854), p. 418-423
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1854_1_13__418_1>

π EXPRIMÉ EN 333 CHIFFRES.

(*Arch. de Mathématiques* de Grunert, t. XXI, p. 119; 1853.)

Le professeur Richter, à Elbing, a fait ce calcul. Les 200 premiers chiffres sont les mêmes que ceux de

M. Dahse (tome IX, page 12) qui sont ainsi vérifiés. Voici les 133 nouveaux chiffres :

44288 10975 66593 34461 28475 64823 37867 83165
27120 19091 45648 56692 34603 48610 45432 66482
13393 60726 02491 41273 72458 70066 06315 58817
48815 20920 098...

D'après ce calcul, les 56 dernières décimales de M. Rutherford ne sont pas exactes (tome X, page 198). Dans ces 133 nouveaux chiffres, les 73 premiers sont vérifiés par un travail de M. le professeur Lehmann, à Postdam (*Arch. de Math.*, tome XXI, page 159; 1853).

Ainsi 273 chiffres sont contrôlés.

Ce Mémoire de M. Lehmann est très-remarquable, le plus complet qui existe pour le calcul de π; on y trouve cette curieuse observation : Si l'on voulait calculer le volume d'une sphère ayant pour rayon un trillion de milles (*), éloignement de la nébuleuse la plus éloignée observée jusqu'à ce jour d'après l'estimation de Herschell, et calculer avec une exactitude telle, que l'erreur soit moindre que la plus petite grandeur microscopique, moindre qu'un cube d'un deux-millionième de pouce de côté, il suffirait de prendre π avec 90 décimales.

Que devient en comparaison l'arénaire d'Archimède?

Ludolf van Ceulen a calculé ses 35 décimales, sans séries, à la manière d'Archimède, par des extractions successives de racines carrées.

Sharp, Machin et Lagny se sont servis de la série

$$\pi = 6 \operatorname{arc\,tang} \sqrt{\frac{1}{3}} = \sqrt{12}\left(1 - \frac{1}{3^1.3} + \frac{1}{3^2.5} - \frac{1}{3^3.7}\cdots\right).$$

M. Lehmann trouve que, pour avoir π par cette série avec 100 décimales exactes, il faut 207 termes, chacun

(*) Le mille d'Allemagne est de deux lieues environ.

avec 103 décimales. Lagny a trouvé 127 chiffres. Il faudrait calculer 263 termes, chacun avec 130 décimales; mais il paraît que Lagny a trouvé les 27 dernières décimales à l'aide d'un artifice qu'on ne connaît pas. M. Lehmann conjecture qu'il a fait usage d'une partie de la série négligée par Machin; savoir :

$$\frac{\sqrt{12}}{3^{207}.415}\left\{\begin{array}{l}1-\frac{415}{417}\cdot\frac{1}{3^1}+\frac{415}{417}\cdot\frac{417}{419}\cdot\frac{1}{3^2}\\ -\frac{415}{417}\cdot\frac{417}{419}\cdot\frac{419}{421}\cdot\frac{1}{3^3}+\ldots\end{array}\right\}.$$

Convertissant cette série en une autre plus convergente, Lagny a pu se servir de cette expression

$$\pi=\sqrt{12}\left(1-\frac{1}{3^1.3}+\frac{1}{3^2.5}-\frac{1}{3^3.7}+\ldots\right)$$
$$-\frac{\sqrt{3}}{3^{206}.830}\left\{\begin{array}{l}1+\frac{2}{417}\cdot\frac{1}{4^1}+\frac{2}{417}\cdot\frac{4}{419}\cdot\frac{1}{4^2}\\ +\frac{2}{417}\cdot\frac{4}{419}\cdot\frac{6}{421}\cdot\frac{1}{4^3}+\ldots\end{array}\right\},$$

et, par un calcul très-compliqué, M. Lehmann trouve qu'il faudra calculer 219 termes, chacun avec 130 décimales, pour obtenir π avec 127 chiffres exacts; ainsi on aura à calculer 44 termes de moins que d'après la première série. On a obtenu cette réduction en réduisant les 56 derniers termes de 263 à 12 termes. L'auteur se propose ensuite cette question : Où faut-il s'arrêter dans le développement de la série générale pour réduire le calcul au moindre nombre de termes. Il applique ces considérations à ces expressions de

$$\pi=4\left(\text{arc tang}\frac{1}{2}+\text{arc tang}\frac{1}{5}+\text{arc tang}\frac{1}{8}\right)$$
$$=8\,\text{tang arc}\frac{1}{3}+4\,\text{arc tang}\frac{1}{7}$$
$$=4\left(\text{arc tang}\frac{1}{2}+\text{arc tang}\frac{1}{3}\right).$$

On a la formule ordinaire

$$\text{arc tang}\,\varphi = \varphi - \frac{1}{3}\varphi^3 + \frac{1}{5}\varphi^5 + \ldots + \frac{1}{2q-1}\varphi^{2q-1} + \ldots,$$

en tout q termes.

L'auteur convertit les r derniers de ces q termes en une autre série convergente, et trouve

$$\text{arc tang}\,\varphi = \varphi - \frac{1}{3}\varphi^3 + \frac{1}{5}\varphi^5 - \text{R},$$

$$\text{R} = \frac{1}{2q-2r+1}\cdot\frac{\varphi^{2q-2r+1}}{1+\varphi^2}\left\{\begin{array}{l} 1 + \dfrac{2}{2q-2r+3}\cdot\dfrac{\varphi^2}{1+\varphi^2} \\ + \dfrac{2.4}{(2q-2r+3)(2q-2r+5)}\left(\dfrac{\varphi^2}{1+\varphi^2}\right)^2 \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}.$$

Nous ne pouvons pas suivre l'auteur dans ses calculs qui remplissent une trentaine de pages. Nous devons nous contenter de savoir que M. Lehmann indique combien il faut prendre de termes pour avoir successivement les nombres de Ludolf, Sharp, Machin, Lagny, Vega, Dahse et les 73 premiers chiffres de M. Richter; d'autres moyens sont indiqués pour passer plus loin. Nous ne connaissons pas de meilleure étude sur les méthodes d'approximation dont il est maintenant si souvent question.

2. En 1852, une brochure in-4 de 10 pages a été publiée à Besançon sous le titre : *Démonstration de l'impossibilité de rectifier exactement la circonférence du cercle,* par Numa Boyé, ingénieur des Mines, ancien élève de l'Ecole Polytechnique (*).

Par des considérations fonctionnelles, l'auteur parvient à la formule connue

$$z\sqrt{-1} = \log\left(\cos z + \sqrt{-1}\,\sin z\right).$$

(*) Je dois cette brochure à l'obligeance de mon collègue, M. Renaud-Ducreux, professeur à l'École d'Artillerie de Besançon.

[L'auteur désigne e^x par E (x) et log x par $\bar{\mathrm{E}}$ (x) ; cette notation n'a pas d'importance logique.]

Faisant

$$z = \frac{\pi}{2},$$

on a

$$\frac{\pi}{2}\sqrt{-1} = \log\sqrt{-1};$$

d'où

$$\frac{\pi}{2} = -\sqrt{-1}\log\sqrt{-1}.$$

L'auteur ajoute : « Cette formule étant exactement déduite, ne comporte que les deux hypothèses suivantes : ou bien elle est une identité, ou bien elle est une équation, c'est-à-dire une relation déterminée, pouvant être exactement satisfaite par une quantité déterminée. »

Il s'attache ensuite à prouver que les deux cas ne sont pas admissibles. Donc il n'existe pas d'expression algébrique possible entre la circonférence et le rayon. On peut répondre que cette expression n'est ni une identité, ni une équation proprement dite. C'est un symbole mnémonique relatif à des développements en série. Si, dans log x développé en série, on fait $x = \sqrt{-1}$, et qu'on multiplie ensuite tous ses termes par $\sqrt{-1}$, on obtient une seconde série réelle, et qui a pour limite $\frac{\pi}{2}$. Il faut donc encore s'en tenir à la démonstration de Lambert.

La géométrie démontre que le côté du carré divisé par la diagonale donne un quotient constant, et que ce quotient est irrationnel; la géométrie démontre encore que la circonférence divisée par le diamètre donne un quotient constant. La géométrie est sans doute capable de démontrer que ce quotient est irrationnel; mais les géomètres sont encore incapables de donner cette démonstration. Il faut toujours distinguer entre la géométrie et les géomètres; comme entre l'analyse et les analystes. La science peut tout, elle est Dieu; mais pas les savants, ce sont des hommes (*).