NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

GARLIN

Note sur les sections toriques

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 13 (1854), p. 415-418

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1854_1_13__415_1>

NOTE SUR LES SECTIONS TORIQUES;

PAR M. GARLIN.

Docteur ès Sciences.

M. A. Serret a, le premier, fait connaître la véritable nature des sections toriques parallèlement à l'axe (*Journal de Mathématiques*, tome VIII, page 495, 1843). Je vais parler ici d'une propriété qui ne se trouve consignée nulle part, à ce que je sache. Elle consiste en ce qu'en coupant un tore déterminé par un plan parallèle à l'axe, la courbe d'intersection est la même que celle qu'on ob-

(*) Une Note de M. Bertrand sur les équations de Hamilton est devenue le sujet d'une belle thèse doctorale de M. Alfred Lafond sur laquelle nous nous proposons de revenir.

tient en cherchant le lieu géométrique des sommets des angles quelconques circonscrits à une certaine ellipse, dont il est facile de déterminer les éléments. Et réciproquement, la courbe du lieu des sommets des angles quelconques circonscrits à une ellipse déterminée, peut être obtenue en coupant un tore dont on détermine les éléments, par un plan dont on assigne la position.

Pour le faire voir, rappelons-nous que l'équation du tore est l'équation du quatrième degré

$$(\sqrt{x^2+y^2}-d)^2+z^2=R^2;$$

R étant le rayon de la circonférence génératrice, d la distance de son centre à l'axe de révolution, et l'origine des coordonnées le pied de la perpendiculaire abaissée de ce centre sur l'axe.

Soit

$$y=p$$

l'équation du plan sécant; la courbe d'intersection qui se projette en vraie grandeur sur le plan XZ a pour équation, dans ce plan,

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}&(x^2+z^2)^2+2(p^2-d^2-R^2)x^2+2(p^2+d^2-R^2)z^2\\&\qquad -4d^2p^2+(d^2+p^2-R^2)^2=0.\end{aligned}\right.$$

Or la courbe relative aux sommets des angles α circonscrits à une ellipse dont les demi-axes sont a et b, a pour équation, en posant tang $\alpha=K$,

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}&(x^2+z^2)^2-2\left(a^2+b^2+\frac{2a^2}{K^2}\right)x^2-2\left(a^2+b^2+\frac{2b^2}{K^2}\right)z^2\\&\qquad +(a^2+b^2)^2+\frac{4a^2b^2}{K^2}=0.\end{aligned}\right.$$

Supposons d'abord qu'on connaisse a, b et α. Il s'agit de voir si, par l'identification des équations (1) et (2), on peut trouver des valeurs réelles et finies pour les éléments d, R et p, relatifs au tore et au plan sécant.

Les équations de l'identification sont

$$d^2 + R^2 - p^2 = a^2 + b^2 + \frac{2a^2}{K^2},$$

$$R^2 - d^2 - p^2 = a^2 + b^2 + \frac{2b^2}{K^2},$$

$$(p^2 + d^2 - R^2)^2 - 4d^2p^2 = (a^2 + b^2)^2 + \frac{4a^2b^2}{K^2}.$$

Retranchant la deuxième de ces équations de la première, on trouve

$$d^2 = \frac{a^2 - b^2}{K^2}.$$

Ainsi en posant, comme d'ordinaire,

$$a^2 - b^2 = c^2,$$

la distance de l'axe de révolution au centre du cercle générateur sera égale à c cotang α.

La deuxième et la troisième équation donnent

$$p = \frac{b^2}{c \sin \alpha};$$

la position du plan sécant est ainsi déterminée.

D'ailleurs la première équation donne, pour le rayon de la circonférence génératrice, en y substituant les valeurs déjà trouvées,

$$R = \frac{a^2}{c \sin \alpha}.$$

Réciproquement, le tore étant défini d'avance, ainsi que la position du plan sécant, les trois équations de l'identification servent à déterminer les dimensions de l'ellipse et l'angle α.

En particulier, si l'angle est droit, le tore est remplacé par la sphère, car $d = 0$; et les valeurs

$$p = \frac{b^2}{c}, \qquad R = \frac{a^2}{c},$$

font connaître le rayon de cette sphère, et la position du petit cercle égal à celui du lieu géométrique.

L'équation (2) du quatrième degré à puissances paires n'est pas décomposable, en général, en facteurs du deuxième degré. On s'en assure en identifiant le premier membre au produit de deux polynômes du deuxième degré en x et y, et l'on voit que l'on n'a de coefficients réels pour ces polynômes que quand $a = b$, c'est-à-dire quand l'ellipse devient un cercle. Alors on trouve deux circonférences pour le lieu; l'une se rapporte à l'angle donné, et l'autre à l'angle supplémentaire. C'est effectivement ce que l'on trouve quand on traite directement la question pour le cercle. On peut encore démontrer l'impossibilité de la décomposition en facteurs, en résolvant l'équation par rapport à z, et cherchant alors la condition pour que la quantité placée sous le radical soit un carré parfait.

Note. Pour l'hyperbole équilatère, le lieu des sommets des angles égaux circonscrits est une cassinoïde. MM. William Roberts et Tortolini ont publié, sur cette courbe, de belles études qui se rattachent aux fonctions elliptiques. (*Journal* de Liouville et *Raccolta scientifica*.) Lorsque $p = R$ sans que d soit nul, l'identification devient impossible. Un cas spécial est celui où $p = d - R$; l'équation (2) ne se rapportant qu'à l'ellipse, n'est pas assez générale. TM.