FRANÇOIS BRIOSCHI

Solutions des questions 285-286

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 13 (1854), p. 402-409

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1854_1_13__402_1>

SOLUTION DES QUESTIONS 285-286

(voir t. XII, p. 444);

PAR M. FRANÇOIS BRIOSCHI,
Professeur à l'Université de Pavie.

Je me propose, dans cette Note, la démonstration des théorèmes suivants :

$u = 0$ *est l'équation rendue homogène d'une courbe plane de degré* m *entre trois coordonnées linéaires.*

1°. *Lorsque le déterminant* (HESSIEN) Δ *de la fonction* u *est identiquement nul, l'équation représente un faisceau de* m *droites.*

2°. *Les points d'intersection des courbes représentées par les équations*

$$u = 0, \qquad \Delta = 0,$$

sont des points d'inflexion ou des points doubles pour la première courbe.

$v = 0$ *est l'équation rendue homogène d'une courbe plane de la classe* n *entre trois coordonnées tangentielles* (*)

(*) Rappelons que $\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}$ étant les coordonnées à l'origine d'une tangente à une courbe, une équation entre z_1 et z_2 de degré n est l'équation de la *classe* n; on la rend homogène en écrivant $\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}$ au lieu de z_1, z_2; le v est relatif à cette sorte d'équations. TM.

3°. *Lorsque le déterminant* ∇ *de la fonction* v *est identiquement nul, l'équation représente des points situés sur une même droite.*

4°. *Les points d'intersection des courbes représentées par les équations* $v = 0$, $\nabla = 0$ *sont des points de rebroussement pour la première courbe.*

$u = 0$ *est l'équation rendue homogène d'une surface de degré* m *entre quatre coordonnées linéaires.*

5°. *Lorsque le déterminant* Δ *de cette fonction est identiquement nul, l'équation représente un cône.*

6°. *La ligne d'intersection des surfaces représentées par les équations* $u = 0$, $\Delta = 0$ *est une ligne d'inflexion (ligne des points paraboliques), pour la première surface.*

$v = 0$ *est l'équation rendue homogène d'une surface de la classe* n *entre quatre coordonnées planaires.*

7°. *Lorsque le déterminant* ∇ *de cette fonction est identiquement nul, l'équation représente une courbe plane.*

8°. *La ligne d'intersection des surfaces représentées par les équations* $v = 0$, $\nabla = 0$ *est une ligne de rebroussement pour la première surface.*

Soit u une fonction algébrique, entière et rationnelle, du degré m des variables $x_1, x_2, \ldots, x_r$. Si l'on rend homogène l'équation $u = 0$ en posant, au lieu des variables $x_1, x_2, \ldots, x_r$, les rapports $\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}, \ldots, \frac{x_r}{x_0}$, et en multipliant par x_0^m, alors un théorème d'Euler, très-connu, nous donnera

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} (m-1)u_0 = x_0 u_{0,0} + x_1 u_{0,1} + \ldots + x_r u_{0,r}, \\ (m-1)u_1 = x_0 u_{1,0} + x_1 u_{1,1} + \ldots + x_r u_{1,r}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ (m-1)u_r = x_0 u_{r,0} + x_1 u_{r,1} + \ldots + x_r u_{r,r}, \\ \qquad\quad mu = x_0 u_0 \;\; + x_1 u_1 + \ldots + x_r u_r, \end{array}\right.$$

où

$$u_s = \frac{du}{dx_s}, \quad u_{i,s} = u_{s,i} = \frac{d^2u}{dx_i\, dx_s}.$$

Ces formules donnent le moyen de transformer le déterminant suivant :

$$H = \begin{vmatrix} u_1, & u_{1,1}, & u_{1,2}, \ldots, & u_{1,r} \\ u_2, & u_{2,1}, & u_{2,2}, \ldots, & u_{2,r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_r, & u_{r,1}, & u_{r,2}, \ldots, & u_{r,r} \\ 0, & u_1, & u_2, \ldots, & u_r \end{vmatrix}.$$

En effet, ce déterminant peut s'écrire

$$H = \frac{1}{m-1} \begin{vmatrix} (m-1)\, u_1, & u_{1,1}, & u_{1,2}, \ldots, & u_{1,r} \\ (m-1)\, u_2, & u_{2,1}, & u_{2,2}, \ldots, & u_{2,r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (m-1)\, u_r, & u_{r,1}, & u_{r,2}, \ldots, & u_{r,r} \\ 0, & u_1, & u_2, \ldots, & u_r \end{vmatrix};$$

et comme, en ajoutant respectivement aux éléments de la première colonne ceux de la deuxième multipliés par $-x_1$, ceux de la troisième multipliés par $-x_2$, etc., la valeur du déterminant H ne change pas, et, ayant égard aux équations (1), on aura

$$H = \frac{1}{m-1} \begin{vmatrix} x_0\, u_{1,0}, & u_{1,1}, & u_{1,2}, \ldots, & u_{1,r} \\ x_0\, u_{2,0}, & u_{2,1}, & u_{2,2}, \ldots, & u_{2,r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_0\, u_{r,0}, & u_{r,1}, & u_{r,2}, \ldots, & u_{r,r} \\ x_0\, u_0 - mu, & u_1, & u_2, \ldots, & u_r \end{vmatrix},$$

c'est-à-dire :

$$H = -\frac{m}{m-1}u \begin{vmatrix} u_{1,1}, & u_{1,2},\ldots, & u_{1,r} \\ u_{2,1}, & u_{2,2},\ldots, & u_{2,r} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ u_{r,1}, & u_{r,2},\ldots, & u_{r,r} \end{vmatrix} + \frac{x_0}{m-1} \begin{vmatrix} u_{1,0}, & u_{1,1},\ldots, & u_{1,r} \\ u_{2,0}, & u_{2,1},\ldots, & u_{2,r} \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ u_{r,0}, & u_{r,1},\ldots, & u_{r,r} \\ u_0, & u_1,\ldots, & u_r \end{vmatrix}.$$

J'observe que le second de ces deux déterminants est égal au suivant :

$$\frac{1}{m-1} \begin{vmatrix} u_{1,0}, & u_{1,1},\ldots, & u_{1,r} \\ u_{2,0}, & u_{2,1},\ldots, & u_{2,r} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ u_{r,0}, & u_{r,1},\ldots, & u_{r,r} \\ (m-1)u_0, & (m-1)u_1,\ldots, & (m-1)u_r \end{vmatrix};$$

ou, en répétant l'opération indiquée ci-dessus, en ayant soin toutefois de substituer les lignes aux colonnes, on aura

$$\frac{x_0}{m-1} \begin{vmatrix} u_{1,0}, & u_{1,1},\ldots, & u_{1,r} \\ u_{2,0}, & u_{2,1},\ldots, & u_{2,r} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ u_{r,0}, & u_{r,1},\ldots, & u_{r,r} \\ u_{0,0}, & u_{0,1},\ldots, & u_{0,r} \end{vmatrix},$$

et, par conséquent,

$$(2)\quad H = -\frac{m}{m-1}u \begin{vmatrix} u_{1,1}, & u_{1,2},\ldots, & u_{1,r} \\ u_{2,1}, & u_{2,2},\ldots, & u_{2,r} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ u_{r,1}, & u_{r,2},\ldots, & u_{r,r} \end{vmatrix} + (-1)^r \frac{x_0^2}{(m-1)^2}\Delta.$$

Analoguement, si ν est une fonction algébrique entière rationnelle de degré n des variables $z_1, z_2, \ldots, z_r$, et si l'on pose

$$K = \begin{vmatrix} v_1, & v_{1,1}, & v_{1,2}, \ldots, & v_{1,r} \\ v_2, & v_{2,1}, & v_{2,2}, \ldots, & v_{2,r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ v_r, & v_{r,1}, & v_{r,2}, \ldots, & v_{r,r} \\ 0, & v_1, & v_2, \ldots, & v_r \end{vmatrix},$$

on aura

$$K = -\frac{n}{n-1} v \begin{vmatrix} v_{1,1}, & v_{1,2}, \ldots, & v_{1,r} \\ v_{2,1}, & v_{2,2}, \ldots, & v_{2,r} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ v_{r,1}, & v_{r,2}, \ldots, & v_{r,r} \end{vmatrix} + (-1)^r \frac{z_0^2}{(n-1)^2} \nabla.$$

Les déterminants Δ et ∇ sont respectivement des degrés $(r+1)(m-2)$ et $(r+1)(n-2)$.

Je suppose les variables $x_0, x_1, \ldots, x_r$; $z_0, z_1, \ldots, z_r$ liées par les deux systèmes d'équations

$$(3) \qquad \begin{cases} v_0 = x_0, & v_1 = x_1, & v_2 = x_2, \ldots, & v_r = x_r, \\ u_0 = z_0, & u_1 = z_1, & u_2 = z_2, \ldots, & u_r = z_r. \end{cases}$$

En prenant la dérivée de chacune des équations du premier système selon $x_0, x_1, \ldots, x_r$, en ayant égard aux équations du second système, on aura $(r+1)^2$ équations, lesquelles peuvent se déduire des deux suivantes :

$$v_{s,0} u_{s,0} + v_{s,1} u_{s,1} + \ldots + v_{s,r} u_{s,r} = 1,$$
$$v_{s,0} u_{i,0} + v_{s,1} u_{i,1} + \ldots + v_{s,r} u_{i,r} = 0,$$

en posant s et $i = 0, 1, 2, \ldots, r$. Ces équations nous donnent

$$(4) \qquad \Delta \cdot \nabla = 1,$$

et, à cause des équations (3), on a, pour toutes les valeurs de $x_0, x_1, \ldots, x_r$ et de $z_0, z_1, \ldots, z_r$ qui satisfont aux équations $u = 0$, $v = 0$, la suivante :

$$x_0 z_0 + x_1 z_1 + x_2 z_2 + \ldots + x_r z_r = 0.$$

J'observe que si le déterminant Hessien Δ est identiquement nul, on a, par l'équation (2),

$$\begin{vmatrix} (m-1)u_1, & u_{1,1}, \ldots, & u_{1,r} \\ (m-1)u_2, & u_{2,1}, \ldots, & u_{2,r} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ (m-1)u_r, & u_{r,1}, \ldots, & u_{r,r} \\ mu, & u_1, \ldots, & u_r \end{vmatrix} = 0$$

identiquement, et l'équation

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_r) = 0$$

est elle-même homogène. Analoguement si $\nabla = 0$ identiquement, l'équation

$$v(z_1, z_2, \ldots, z_r) = 0$$

est homogène.

Pour toutes les valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_r$ qui satisfont à l'équation $u = 0$, et rendent $H = 0$, on a $\Delta = 0$.

Applications géométriques. Si l'on suppose $r = 2$ et $\Delta = 0$ ou $\nabla = 0$ identiquement, les équations

$$u(x_1, x_2) = 0, \quad v(x_1, x_2) = 0,$$

sont homogènes, et l'on a les théorèmes 1er et 3e.

Si l'on suppose $v = 3$ et $\Delta = 0$ ou $\nabla = 0$ identiquement, les équations

$$u(x_1, x_2, x_3) = 0, \quad v(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

sont homogènes, et l'on a les théorèmes 5e et 7e (*).

(*) PLUCKER, *System der Geometrie des Raumes*, p 17.

En désignant par R le rayon de courbure d'une courbe plane représentée par l'équation $u = 0$, on a

$$R = \pm \frac{(u_1^2 + u_2^2)^{\frac{3}{2}}}{H}.$$

Aux points d'inflexion de cette courbe, on a $R = \infty$, par conséquent $H = 0$, et

$$(5) \qquad \begin{vmatrix} u_{0,0}, & u_{0,1}, & u_{0,2} \\ u_{1,0}, & u_{1,1}, & u_{1,2} \\ u_{2,0}, & u_{2,1}. & u_{2,2} \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation représentant une courbe plane du degré $3(m-2)$, les points d'inflexion de la proposée seront, en général, $3m(m-2)$. Aux points doubles de la courbe $u = 0$, on a

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0;$$

par conséquent $H = 0$, et l'équation (5) aura lieu aussi pour ces points (théorème 2[e]) (*).

Aux points de rebroussement de la courbe $v = 0$, on a $R = 0$, par conséquent $H = \infty$ et $\Delta = \infty$, ou, en ayant égard à l'équation (4),

$$\begin{vmatrix} v_{0,0}, & v_{0,1}, & v_{0,1} \\ v_{1,0}, & v_{1,1}, & v_{1,2} \\ v_{2,0}, & v_{2,1}, & v_{2,2} \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation du degré $3(n-2)$ représente une courbe plane, et les points de rebroussement de la proposée qui, en général, seront en nombre $3n(n-2)$, seront les

(*) *Voyez* l'excellent Traité de M. Salmon, *On the higher plane curves*, page 72.

points d'intersection de cette courbe avec la courbe $\nu = 0$ (théorème 4e) (*).

On doit se rappeler que les équations $u = 0$, $\nu = 0$ représentant une même courbe, on a

$$n = m(m-1).$$

En dénotant par R_1, R_2 les rayons principaux de courbure d'une surface $u = 0$, on a

$$R_1 R_2 = \frac{(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)^2}{H}.$$

Si l'un des deux rayons est infini, on a $H = 0$, par conséquent $\Delta = 0$. Cette équation représente une surface du degré $4(m-2)$, et la ligne d'intersection de cette surface avec la surface $u = 0$ sera une ligne d'inflexion ou ligne des points paraboliques pour cette surface (théorème 6e) (**).

Si l'un des deux rayons est nul, on a $H = \infty$; par conséquent, $\nabla = 0$. Cette équation représente une surface de la classe $4(n-2)$, et la ligne d'intersection de cette surface avec la surface $\nu = 0$ sera une ligne de rebroussement pour cette dernière surface (théorème 8e).