FAURE

Solution des questions 285-286

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 13 (1854), p. 398-402

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1854_1_13__398_1>

SOLUTION DES QUESTIONS 285-286;

(voir t. XII, p. 444);

PAR M. FAURE.

285. $u=0$ est l'équation rendue homogène d'une courbe plane de degré m entre trois variables x_1, x_2, x_3. Lorsque le déterminant de cette fonction est identiquement nul, l'équation représente un faisceau de m droites.

(O. HESSE).

D'après les notations de M. Hesse indiquées dans les *Nouvelles Annales*, tome X, page 124, la fonction u a six coefficients différentiels du second ordre :

$$u_{11},\quad u_{22},\quad u_{33},\quad u_{12},\quad u_{13},\quad u_{23},$$

et son déterminant D est donné par la relation

$$D = u_{11}u_{22}u_{33} + 2u_{12}u_{13}u_{23} - u_{11}u_{23}^2 - u_{22}u_{13}^2 - u_{33}u_{12}^2.$$

Il serait identiquement nul si la fonction u, sans cesser de rester homogène, ne contenait que les deux variables x_1

et x_2, car la variable x_3 étant supposée nulle, les dérivées de la fonction u par rapport à cette variable le seraient aussi, et, par suite, le déterminant, puisque chacun de ses termes contient u_3. Mais, dans ce cas, on a

$$(1) \qquad u = \mathrm{F}(a_1 x_1,\ a_2 x_2) = 0,$$

et l'équation $u = 0$ représente le système de m droites passant par un même point. Lors donc que l'équation $u = 0$ représente un faisceau de droites passant par l'origine des coordonnées, son déterminant est identiquement nul; prouvons maintenant la réciproque de cette propriété. A cet effet, j'opère un changement de coordonnées et je fais voir que l'équation que j'obtiens, fonction des nouvelles variables, est nécessairement de la forme (1), de sorte que nous aurons transporté l'origine des coordonnées au sommet du faisceau. Je poserai donc

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 y_1 + a_2 y_2 + \alpha_1 z, \\ x_2 &= b_1 y_1 + b_2 y_2 + \alpha_2 z, \\ x_3 &= c_1 y_1 + c_2 y_2 + \alpha_3 z, \end{aligned}$$

mais en ne faisant entrer dans ces équations que deux variables indépendantes y_1, y_2, et regardant z comme une fonction de x_1, x_2, x_3 déterminée par ces équations. Les constantes a, b, c, α sont, du reste, quelconques. Je substitue les valeurs de x_1, x_2, x_3 dans la fonction u, et j'ordonne le résultat par rapport aux puissances de z. J'appelle U ce que devient u après la substitution des binômes

$$a_1 y_1 + a_2 y_2, \quad b_1 y_1 + b_2 y_2, \quad c_1 y_1 + c_2 y_2$$

à la place de x_1, x_2, x_3 : ce sera le premier terme du développement; d'après la loi de Taylor, le coefficient de z, que j'appellerai U′, sera la valeur de

$$\alpha_1 \frac{du}{dx_1} + \alpha_2 \frac{du}{dx_2} + \alpha_3 \frac{du}{dx_3},$$

ou

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3$$

(d'après la notation de M. Hesse) lorsqu'on aura fait la substitution précédente. Quant aux autres termes, je les désigne par U″, U‴, etc., leurs valeurs se déduisent facilement de U′. On aura ainsi

$$o = U + U'z + U''\frac{z^2}{1.2} + U'''\frac{z^3}{1\ 2.3} + \ldots.$$

Or nous allons voir que le second terme de ce développement est identiquement nul, et, par suite, tous les suivants, de sorte que notre équation se réduit à

$$U = o,$$

équation homogène et à deux variables y_1, y_2 qui représente un faisceau de m droites. Le déterminant D′ de cette fonction sera identiquement nul, et par suite D, d'après la relation qui lie entre eux ces deux déterminants.

Pour démontrer que $U' = o$, je désignerai par $2D_{12}$, $2D_{13}$, $2D_{23}$, les dérivées du déterminant D par rapport aux quantités u_{12}, u_{13}, u_{23}, et simplement par D_{11}, D_{22}, D_{33}, les dérivées du même déterminant par rapport à u_{11}, u_{22}, u_{33}. On voit facilement que l'on a la série d'équations:

$$\begin{aligned}
D_{11} u_{11} + D_{21} u_{21} + D_{31} u_{31} &= o,\\
D_{11} u_{12} + D_{21} u_{22} + D_{31} u_{32} &= o,\\
D_{11} u_{13} + D_{21} u_{23} + D_{31} u_{33} &= o;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{12} u_{11} + D_{21} u_{21} + D_{31} u_{31} &= o,\\
D_{12} u_{12} + D_{22} u_{22} + D_{32} u_{32} &= D,\\
D_{12} u_{13} + D_{23} u_{23} + D_{33} u_{33} &= o;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{13} u_{11} + D_{23} u_{21} + D_{33} u_{31} &= o,\\
D_{13} u_{12} + D_{23} u_{22} + D_{33} u_{32} &= o,\\
D_{13} u_{13} + D_{23} u_{23} + D_{33} u_{33} &= D.
\end{aligned}$$

Comme l'on suppose que D est identiquement nul, tous les seconds membres de ces équations sont nuls ; de sorte que, si l'on regarde les quantités D_{11}, D_{21}, etc., comme inconnues, on aura trois systèmes d'équations dans lesquels les coefficients des inconnues sont les mêmes : par suite, leurs valeurs sont proportionnelles. Désignant par P une expression algébrique de degré $2(m-2)$, c'est-à-dire de même degré que les dérivées D_{11}, D_{21}, etc., et α_1, α_2, α_3 trois constantes, on pourra poser

$$D_{11} = \alpha_1 P; \quad D_{21} = \alpha_2 P; \quad D_{31} = \alpha_3 P;$$

il en résulte

$$D_{22} = \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1} P; \quad D_{23} = \frac{\alpha_2 \alpha_3}{\alpha_1}; \quad D_{13} = \frac{\alpha_3^2}{\alpha_1}.$$

D'après le principe des fonctions homogènes,

$$u_{11} x_1 + u_{12} x_2 + u_{13} x_3 = (m-1) u_1,$$
$$u_{21} x_1 + u_{22} x_2 + u_{23} x_3 = (m-1) u_2,$$
$$u_{31} x_1 + u_{32} x_2 + u_{33} x_3 = (m-1) u_3.$$

Je multiplie la première équation par D_{11}, la seconde par D_{12}, la troisième par D_{13}, puis j'ajoute, en ayant égard à notre système d'équations écrites ci-dessus,

$$D x_1 = (m-1)(D_{11} u_1 + D_{12} u_2 + D_{13} u_3) = 0.$$

Mettant ici à la place des dérivées de D leurs valeurs en fonction de P, on trouve

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = 0.$$

Cette démonstration s'applique d'elle-même à la question 286, de sorte que l'on peut énoncer ce théorème:

$u = 0$ étant l'équation rendüe homogène d'une surface de degré m entre quatre variables, si le déterminant de la fonction est identiquement nul, l'équation représente un cône. C. Q. F. D.