Sur les résidus dans la division arithmétique ; d'après M. Lejeune-Dirichlet

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 13 (1854), p. 396-398

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1854_1_13__396_0>

SUR LES RÉSIDUS DANS LA DIVISION ARITHMÉTIQUE;
D'APRÈS M. LEJEUNE-DIRICHLET (*).

1. Divisons le nombre entier p successivement par les n nombres $1, 2, 3, \ldots, n-1, n$; on obtient n restes qui se divisent en trois classes :

A) restes égaux respectivement aux moitiés des diviseurs correspondants;

B) restes supérieurs à ces moitiés;

C) restes inférieurs à ces moitiés.

La classe C est plus fréquente que les deux autres classes; autrement, le nombre des diviseurs qui fournissent des restes inférieurs aux moitiés de ces diviseurs est plus considérable que le nombre des autres diviseurs, de sorte que si l'on désigne par n' le nombre des diviseurs qui fournissent la classe C, n croissant indéfiniment, on aura

$$\lim \frac{n'}{n} = 2 - \log 4 = 0,6137.$$

Dans le *Journal* de Crelle cité, M. L. D. résout le problème général, les restes étant inférieurs à une fraction quelconque du diviseur, et l'on fait usage d'une transformation ingénieuse qui peut avoir des applications nombreuses. C'est le type du génie de cet illustre analyste d'inventer, pour résoudre les problèmes particuliers, des procédés d'une admirable fécondité, et employés avec avantage dans des circonstances étrangères à celles qui ont donné naissance à ces procédés.

(*) *Mém. de l'Acad. de Berlin*, 1849. CRELLE, t. XLVII, p. 151, 1854.

Ce Mémoire est suivi d'un autre : *De formarum binariarum secundi gradus compositione*, et des considérations sur la première démonstration de M. Gauss, de la loi de réciprocité dans la théorie des résidus quadratiques. Nous annonçons ces travaux avec bonheur, car le long silence de certains hommes est une calamité (*).

M. Bienaymé, le savant académicien, a bien voulu nous communiquer la démonstration suivante :

Le quotient 1 répond à $\frac{n}{2}$ diviseurs; parmi ceux-ci, il n'y a évidemment que les diviseurs compris entre $\frac{n}{2}$ et $\frac{2}{3}n$ qui peuvent donner des restes égaux ou supérieurs à leurs moitiés respectives; ils ne sont donc qu'au nombre de

$$\frac{2}{3}n - \frac{1}{2}n = \frac{1}{6}n;$$

de même pour un diviseur d ayant un quotient q, il y aura des restes inférieurs au $\frac{1}{2}$ diviseur d, jusqu'à ce qu'on ait

$$n = dq + \frac{d}{2} \quad \text{ou} \quad d = \frac{2n}{2q+1};$$

de là à

$$d = \frac{n}{q+1}$$

il y aura au plus

$$\frac{2n}{2q+1} - \frac{n}{q+1} = \frac{n}{(q+1)(2q+1)}$$

diviseurs donnant des restes plus grands que leurs moitiés

(*) On a dit cela de Sieyès. Je n'ai jamais compris la justesse de cette plainte; du moins d'après la vie publique de cet homme d'État.

respectives. Faisant successivement q égal à 1, 2, 3, le nombre de ces diviseurs sera au plus exprimé par la série

$$n\left[\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{4.7}+\ldots+\frac{n}{(q+1)(2q+1)}\ldots\right].$$

Lorsque n est infiniment grand, q est infini, et la série devient

$$(-1+\log 4)\,n;$$

donc le nombre des diviseurs donnant des restes inférieurs à leurs moitiés respectivement est $n\,(2-\log 4)$.