WOEPCKE

Sur le mot kardaga et sur une méthode indienne pour calculer les sinus

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 13 (1854), p. 386-394

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1854_1_13__386_0>

SUR LE MOT KARDAGA ET SUR UNE MÉTHODE INDIENNE POUR CALCULER LES SINUS.

PAR M. WOEPCKE.

Dans le tome XII, page 44, des *Nouvelles Annales*, on signale le mot *kardaga* à l'attention des personnes qui s'occupent de recherches historiques.

La question de l'origine et de la vraie signification de ce terme me paraît être résolue dans le passage suivant du Mémoire de M. Reinaud sur l'Inde (XVIII[e] vol. des *Mémoires de l'Académie des Inscriptions et Belles-Lettres*, page 313) :

» A l'égard du mot *kardagia*, Albyrouny rapporte » qu'il s'appliquait à un *arc de cercle* renfermant la » 96[e] partie de la circonférence, et ayant la valeur de » $3^\circ 45'$, ou, en d'autres termes, de 225 minutes. Ce » mot est peut-être une altération du sanscrit *cramadjya*, » qui signifie *sinus droit.* »

Je reviendrai à la fin de cette Note sur la manière dont cette dernière signification, qui est la vraie, a pu être modifiée dans l'usage, et sur les altérations que, pareillement, le mot *cramadjya* même a eues à subir. Je commencerai par discuter un passage important du *Sourya Siddhanta* (*), qui confirme complétement la conjecture du célèbre académicien, et dont voici la traduction textuelle :

« Divisez le nombre de minutes contenu dans un sinus,

(*) *Asiatick Researches*, 5[e] édition, London, 1807, in-8°; vol. II, page 245. Ce passage y est donné par *M. Davis* dans un Mémoire sur le calcul astronomique des Indiens.

» savoir 1800, par 8, le quotient 225 est le premier *jya-*
» *pinda*, ou la première des vingt-quatre portions de la
» moitié de la corde de l'arc. Divisez le premier *jyapinda*
» par 225, retranchez le quotient 1 du dividende, et
» ajoutez le reste 224 au premier *jyapinda* afin d'obtenir
» le second *jyapinda* 449. Divisez le second *jyapinda*
» par 225, et, attendu que le quotient est 1 et la fraction
» de plus d'une demi-minute, retranchez 2 du reste pré-
» cédent 224, et ajoutez le reste ainsi trouvé au second
» *jyapinda* afin d'obtenir le troisième *jyapinda* 671.
» Divisez ce nombre par 225, et retranchez le quotient
» 3 du dernier reste 222; ajoutez le reste ainsi trouvé
» 219 au troisième *jyapinda* afin d'obtenir le quatrième
» *jyapinda* 890. Divisez ce nombre par 225, et retran-
» chez le quotient du dernier reste; ajoutez le reste ainsi
» trouvé au quatrième *jyapinda* pour obtenir le cin-
» quième *jyapinda* 1105, et continuez de la sorte jusqu'à
» ce que les vingt-quatre CRAMADJYAS (sinus droits) soient
» au complet, ce qui sera, comme il suit :

$\overset{1}{225}$, $\overset{2}{449}$, $\overset{3}{671}$, $\overset{4}{890}$, $\overset{5}{1105}$, $\overset{6}{1315}$, $\overset{7}{1520}$, $\overset{8}{1719}$,
$\overset{9}{1910}$, $\overset{10}{2093}$, $\overset{11}{2267}$, $\overset{12}{2431}$, $\overset{13}{2585}$, $\overset{14}{2728}$, $\overset{15}{2859}$, $\overset{16}{2978}$,
$\overset{17}{3084}$, $\overset{18}{3177}$, $\overset{19}{3256}$, $\overset{20}{3321}$, $\overset{21}{3372}$, $\overset{22}{3409}$, $\overset{23}{3431}$, $\overset{24}{3438}$.

Exprimant cela en formules, et désignant par une fraction, avec deux traits superposés, le nombre entier le plus voisin de cette fraction, la méthode indienne pour calculer les sinus est la suivante:

$$\sin 225' = 225;$$

$$\sin(2.225') = \left\{225 - \frac{\sin(1.225')}{225}\right\} + \sin(1.225')$$
$$= 224 + \sin(1.225') = 449;$$

$$\sin(3.225') = \left\{224 - \frac{\overline{\overline{\sin(2.225')}}}{225}\right\} + \sin(2.225')$$
$$= 222 + \sin(2.225') = 671;$$

$$\sin(4.225') = \left\{222 - \frac{\overline{\overline{\sin(3.225')}}}{225}\right\} + \sin(3.225')$$
$$= 219 + \sin(3.225') = 890;$$

$$\sin(5.225') = \left\{219 - \frac{\overline{\overline{\sin(4.225')}}}{225}\right\} + \sin(4.225')$$
$$= 215 + \sin(4.225') = 1105;$$

et ainsi de suite.

Mais observons que, de ces relations, on tire aussi

$$224 = \sin(2.225') - \sin(1.225'),$$
$$222 = \sin(3.225') - \sin(2.225'),$$
$$219 = \sin(4.225') - \sin(3.225'),$$
$$215 = \sin(5.225') - \sin(4.225'), \text{ etc.},$$

et, en substituant ces valeurs, on trouve que la méthode indienne s'exprime par la formule

$$\sin(\overline{n+1}.225') = \sin(n.225') - \sin(\overline{n-1}.225')$$
$$- \frac{\sin(n.225')}{225} + \sin(n.225'),$$

ou

$$(1)\ \sin(\overline{n+1}.225') = \sin(n.225')\left(2 - \frac{1}{225}\right) - \sin(\overline{n-1}.225').$$

Or, on a

$$\sin(\alpha \pm \Delta\alpha) = \sin\alpha\ \cos\Delta\alpha \pm \cos\alpha.\sin\Delta\alpha;$$

donc

$$\sin(\alpha + \Delta\alpha) + \sin(\alpha - \Delta\alpha) = 2.\sin\alpha.\cos\Delta\alpha$$
$$= 2\sin\alpha\left(1 - 2\sin^2\frac{\Delta\alpha}{2}\right),$$

ou

$$(2)\quad \sin(\alpha + \Delta\alpha) = \sin\alpha\left(2 - 4\sin^2\frac{\Delta\alpha}{2}\right) - \sin(\alpha - \Delta\alpha).$$

L'analogie remarquable qui existe entre cette dernière formule et celle à laquelle se ramène la méthode indienne, a été reconnue par M. Playfair (*) et constatée par M. Delambre (**).

M. Delambre fait remarquer (***) que M. Playfair « ne » dit pas pour quelle raison les Indiens se seraient bornés » aux arcs multiples de $3°45'$ »; mais M. Delambre lui-même n'en dit rien non plus.

Cependant cette raison n'est pas bien difficile à trouver, et comme il importe, pour la question dont il s'agit ici, de bien éclaircir le rôle que joue l'arc de 225 minutes, auquel est resté le nom de *cramadjya* (sinus) par excellence, et, par suite, celui de *kardaga*, on voudra bien me permettre d'entrer à ce sujet dans quelques détails.

Les Indiens divisent la circonférence en degrés et minutes; connaissant le rapport de la circonférence au rayon (****), ils déterminent la valeur en minutes d'un arc égal au rayon, c'est-à-dire ils évaluent le rayon en mi-

---

(*) *Transactions of the royal Society of Edimburgh*, année 1798, tome IV, partie II, pages 83 et suivantes.

(**) *Histoire de l'Astronomie ancienne*, vol. I, pages 458 et suivantes.

(***) *Loc. laud.*, page 460.

(****) Voir *Nouvelles Annales de Mathématiques*, tome V, page 571, 6e note ajoutée par M. Marre à son excellente traduction de la partie géométrique de l'Algèbre de Mohammed-ben-Moussa.

nutes, et ils font $r = 3438'$, valeur exacte si l'on néglige les fractions de minute. Ils connaissent les formules

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} \text{ rayon} = 1719',$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \left(\frac{1 - \cos \alpha}{2}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad r^2 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha\ ;$$

conséquemment ils peuvent déterminer, par des bissections successives, les sinus de 15°, de $7^\circ 30'$, de $3^\circ 45'$, toujours exprimés en minutes.

Or, dans cette succession de sinus, celui de $3^\circ 45'$ est *le premier qui contient le même nombre de minutes que l'arc auquel il correspond;* donc, si l'on ne demande qu'une exactitude aux minutes près, on s'arrêtera naturellement au sinus de $3^\circ 45'$, parce que les sinus des arcs plus petits seront à plus forte raison égaux à ces arcs, et s'obtiennent par conséquent sans calcul. Par la même raison, ou encore à plus forte raison, il suffira, pour les intervalles compris entre les multiples de $3^\circ 45'$, d'une simple interpolation, lorsqu'on ne demande les sinus qu'aux minutes près, attendu que le premier de ces intervalles, celui de 0° à $3^\circ 45'$, est le plus grand de tous.

On voit maintenant pourquoi le sinus ou l'arc de $225'$ a pu être considéré comme l'élément fondamental de la Table des sinus, comme le sinus par excellence.

Mais cet arc (ou du moins un arc très-voisin de 225 minutes), jouit encore d'une autre propriété très-remarquable qui a échappé à M. Playfair et à M. Delambre, et qui pourra faire paraître la méthode indienne sous un jour tout nouveau.

On a pu remarquer qu'il figure dans l'exposé de la méthode indienne un *diviseur* 225. D'après la formule (2), ce diviseur devrait être

$$\frac{1}{4\sin^2\frac{225'}{2}} = 233,506,$$

ainsi que l'a fait remarquer M. Delambre, qui qualifie à deux reprises différentes (*) le chiffre 225 de simple faute d'impression, ou erreur de copie.

J'avoue qu'il m'a paru bien difficile d'admettre une faute d'impression répétée ainsi quatre fois de suite, toujours de la même manière. J'ai donc tâché de trouver la raison d'être de ce diviseur 225, identique au nombre de minutes dont les arcs de la Table indienne sont les multiples.

Or, la méthode indienne s'exprime, comme nous avons vu, par la formule

$$(1)\quad \sin(\overline{n+1}.\alpha') = \sin(n.\alpha')\left(2 - \frac{1}{\alpha}\right) - \sin(\overline{n-1}.\alpha')$$

Cette formule, dit-on, n'est pas exacte, n'est pas une identité. Donc, pour la rendre exacte, nous n'aurons qu'à déterminer la valeur de α qui la rend identique. En combinant la formule (1) avec l'identité

$$(2)\quad \sin(\overline{n+1}.\alpha') = \sin(n.\alpha')\left(2 - 4\sin^2\frac{\alpha'}{2}\right) - \sin(\overline{n-1}.\alpha'),$$

on obtient

$$(3)\qquad 4\alpha\sin^2\frac{\alpha'}{2} = 1,$$

d'où

$$\alpha' = 227'\,48'',5,$$

valeur qui approche de 225′ d'une manière si frappante,

(*) *Loc. laud.*, pages 458 et 460.

qu'il me paraît impossible de regarder cette coïncidence comme purement accidentelle. Certes, les Indiens n'ont probablement pas suivi cette marche. Mais en calculateurs excellents qu'ils étaient (et qu'ils sont encore aujourd'hui), ils auront découvert par résultats de calcul ce dont nous nous rendons compte par le raisonnement analytique.

Aussi ne suis-je pas éloigné de croire ce que M. Delambre paraît ne vouloir pas admettre, savoir : que les Indiens ont eu, outre la Table ci-dessus, qui n'était évidemment destinée qu'à des calculs où l'on ne demandait qu'une exactitude aux minutes près, d'autres Tables de sinus plus exactes (*).

Maintenant, pour revenir au nom *kardaga*, il paraît donc que ce terme et le terme indien *cramadjya* dont il est l'altération, ne signifiaient originairement que *sinus* simplement, les sinus d'une Table (**); qu'ensuite ce nom a été donné par excellence au sinus particulier, ou à

(*) Comparer le passage cité ci-après du *Mémoire sur l'Inde* de M. Reinaud, page 312.

(**) C'est ce qui résulte aussi d'un passage de l'ouvrage arabe intitulé : *Târîkh Alhokamâ* (*Annales des Savants*) cité par M. Reinaud (*Mémoire sur l'Inde*, page 312), passage intéressant et qui peut donner lieu à quelques observations, que nous réservons pour une autre occasion. Cette citation est ainsi conçue : « En l'année 156 de l'hégire (773 de J.-C.), il arriva de » l'Inde à Bagdad un homme fort instruit dans les doctrines de son pays. » Cet homme possédait la méthode du Sindhind, relative aux mouvements » des astres et aux équations calculées au moyen de sinus de quart en » quart de degré. Il connaissait aussi diverses manières de déterminer les » éclipses, ainsi que le lever des signes du zodiaque. Il avait composé un » abrégé d'un ouvrage relatif à ces matières, qu'on attribuait à un prince » indien nommé Fygar. *Dans cet écrit, les kardagia étaient calculés par* » *minutes*. Le khalife ordonna qu'on traduisît le Traité indien en Arabe, » afin d'aider les musulmans à acquérir une connaissance exacte des étoiles. » Le soin de la traduction fut confié à Mohammed, fils d'Ibrahim-al-Fazary, le premier d'entre les musulmans qui s'était livré à une étude approfondie de l'astronomie : on désigna plus tard cette traduction, chez » les astronomes, sous le titre de *Grand Sindhind*. »

l'arc égal à ce sinus, qui formait un élément fondamental dans la construction de la Table indienne, et qu'on a fini par donner le même nom à d'autres arcs ou quantités jouant un rôle important dans la construction des Tables de sinus, par exemple à l'arc de 15 degrés, ainsi qu'on peut le voir dans la méthode de Purbach analysée par M. Delambre (*Hist. de l'Astron. du moyen âge*, p. 282).

Quant au mot *kardaga* même, on ne doit pas s'étonner que les Arabes aient modifié un peu le terme indien en l'adoptant, et qu'ils aient fait *kardadja* de *cramadjya*, de même qu'ils faisaient *sindhind* de *siddhanta*. Au reste, la transformation de *cramadjya* en *kardadja* pouvait se faire d'autant plus facilement, que la transcription arabe de *cramadjya* est *k r m d dj h*, et qu'il suffit d'omettre le *m*, figuré dans l'écriture arabe par un petit nœud, pour avoir *k r d dj h*, et pour prononcer *kardadja*. Lorsqu'on connaît les altérations parfois incroyables qu'ont subies des mots et des noms propres grecs en passant dans la langue ou dans les manuscrits arabes, la conjecture précédente n'a rien que de très-admissible.

Note du Rédacteur. — *Jya* en sanscrit est proprement la corde de l'arc avec lequel on tire; le nom du sinus en cette même langue est *djyva* (*); les Arabes ont adopté ce mot, et appellent le sinus *djib*. Mais en arabe ce même mot signifie une espèce d'élévation, sorte de poche formée par un vêtement, un *sinus vestis*, et les traducteurs l'ont pris dans ce sens-là. Ainsi l'origine de la dénomination du sinus trigonométrique tient à un quiproquo. *Djib* désigne aussi en arabe un réservoir d'eau, une citerne : double signification que présente aussi l'hébreu *gaba*, s'élever, s'enfler (d'où peut-être le *gibbus* latin); *guebe* est une citerne.

(*) Communiqué par le savant orientaliste Munk.

Quant au mot sanscrit *cramadjya* (sinus droit), il est formé de deux mots, *crama* et *djya :* le dernier signifie *sinus;* le premier vient de la racine *cram,* marcher, et désigne la *marche,* le *pied,* peut-être le pied-sinus, le sinus soutien principal, comme nous disons le pied droit; c'est très-conjectural.