Nouvelles annales de mathématiques

Bibliographie

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 13 (1854), p. 381-384

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1854_1_13__381_1>

BIBLIOGRAPHIE.

Tous les ouvrages annoncés dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* se trouvent chez MALLET-BACHELIER, libraire, quai des Augustins, 55.

COURS D'ALGÈBRE SUPÉRIEURE; par *M. Serret* (suite)

(voir t. XIII, p. 357).

Leçon quatrième (49 - 67). — La méthode d'élimination par les fonctions symétriques ne donne pas la correspondance entre les valeurs des inconnues. M. Liouville, à l'aide d'un procédé indiqué par Poisson, remédie à cet inconvénient; c'est par là que commence cette leçon. (Voir *Nouvelles Annales*, tome VI, page 295). Cela revient aussi à chercher la racine commune à deux équations; question dont se sont occupés Lagrange (*Acad. Berlin*, 1770 et 1771) et Abel (*Annales de Gergonne*, tome XVII) (*). Ces deux théorèmes qui termi-

(*) On a oublié d'insérer ce Mémoire dans les OEuvres complètes d'Abel publiées par M. B. Holmboe. Christiania; 2 vol. in-4; 1839.

nent la leçon n'étant pas dans nos *Annales*, nous croyons devoir les consigner ici.

Théorème de Lagrange.

Soient

$$(1)\qquad f(x) = x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \ldots + p_m = 0,$$
$$(2)\qquad F(x) = x^n + q_1 x^{n-1} + q_2 x^{n-2} + \ldots + q_n = 0,$$
$$(a_1, a_2, \ldots, a_n);$$

les a sont les n racines de l'équation (2).

Formons l'équation

$$(3)\qquad (z - f(a_1))(z - f(a_2)) \ldots (z - f(a_n)) = 0.$$

Autant cette équation aura de racines nulles, autant les équations (1) et (2) auront de racines communes; les coefficients de l'équation (3) sont donnés par la théorie des fonctions symétriques et sont des fonctions entières de

$$p_1, p_2, \ldots, q_1, q_2, \ldots, q_n.$$

Mais on peut déduire ces coefficients par différentiation du dernier terme de l'équation (3). En effet, soit

$$V = f(a_1) f(a_2) \ldots f(a_n)$$

(V est une fonction entière de $p_1, \ldots, p_n$, $q_1, \ldots, q_n$);

$$f(a_1) = a_1^m + p_1 a_1^{m-1} + \ldots + p_m,$$
$$\frac{df(a_1)}{dp_m} = 1;$$

de même

$$\frac{df(a_2)}{dp_m} = 1 \ldots.$$

Donc $\dfrac{dV}{dp_m}$ est la somme des produits $n-1$ à $n-2$ des racines $f(a_1)$, $f(a_2)$, etc. On a ainsi le coefficient de z. Par un raisonnement analogue, on trouve le coefficient de z^2, etc.; on a donc

$$z^n - \frac{1}{n-1}\frac{d^{n-1}V}{dp_m^{n-1}}z^{n-1} + \ldots \pm \frac{1}{2}\frac{d^2V}{dp_m^2}z^2 \mp \frac{dV}{dp_m}z \pm V = 0.$$

Ainsi, pour que μ racines de l'équation (2) satisfassent à l'équation (1), on doit avoir les μ conditions

$$V = 0,\quad \frac{dV}{dp_m} = 0,\quad \frac{d^2V}{dp_m^2} = 0,\ \ldots,\ \frac{d^{\mu-1}V}{dp_m^{\mu-1}} = 0.$$

S'il n'y a pas de racines égales parmi les n racines a, les deux équations (1) et (2) ont nécessairement un facteur commun de degré μ; mais s'il y a des racines égales, cette conséquence n'est plus certaine; de même les équations

$$\frac{df(a_1)}{dp_m} = 1, \ldots,$$

ne subsistent qu'autant qu'aucun coefficient p_1, p_2, etc., ne soit fonction de p_m; mais si cette dépendance existe, les équations de condition ne sont plus les mêmes.

Si $b_1, b_2, \ldots, b_m$ sont m racines de l'équation (1), on aura des conditions analogues à celles qu'on vient de donner, pour que ces μ racines de l'équation (1) appartiennent à l'équation (2).

Exemple. Quelles sont les conditions pour qu'une ligne plane du troisième degré se décompose en une conique et une droite?

Solution. Soient

$$(1)\qquad f(x) = x^3 + p_1x^2 - p_2x + p_3 = 0,$$
$$(2)\qquad F(x) = x^2 + q_1x + q_2 = 0;$$

p_1, p_2, p_3, q_1, q_2 sont des fonctions de y d'un degré indiqué par l'indice :

$$V = q_2^3 - q_1 q_2^2 p_1 + (q_1^2 q_2 - 2 q_2^2) p_2 - (q_1^3 - 3 q_1 q_2) p_3 + q_2^2 p_1^2$$
$$- q_1 q_2 p_1 p_2 + (q_1^2 - 2 q_2^1) p_1 p_3 + q_2 p_2^2$$
$$- q_1 p_2 p_3 + p_3^2 = 0,$$

$$\frac{dV}{dp_3} = - q_1^3 + 3 q_1 q_2 + (q_1^2 - 2 q_2) p_1 - q_1 p_2 + 2 p_3 = 0.$$

Éliminant p_3,

$$(q_1^2 - 4 q_2)(q_1^2 - q_2 - q_1 p_1 + p_2)^2 = 0,$$

posons

$$q_1^2 - 4 q_2 = 0,$$

la conique se réduit à une droite double : et éliminant q_2 de $\frac{dV}{dp_3}$, on obtient

$$q_1^3 - 2 q_1^2 p_1 + 4 q_1 p_2 - 8 p_3 = 0.$$

Cette équation donne les valeurs de y, correspondant aux intersections de la droite double avec la courbe du troisième degré. Si la dernière équation est une identité, la courbe du troisième degré se réduit à une droite et à une conique. Si $q_1^2 - 4 q_2$ n'est pas nul, on aura

$$q_1^2 - q_2 - q_1 p_1 + p_2 = 0;$$

éliminant q_2 entre cette équation et $\frac{dV}{dp_2} = 0$, on obtient

$$q_1^3 - 2 q_1^2 p_1 + q_1 (p_2 + p_1^2) + p_3 = 0.$$

Si cette équation est une identité, la courbe du troisième degré représente le système de trois droites.

(La suite prochainement.)