KORALEK

Exercice sur une équation numérique

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 13 (1854), p. 36-41
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1854_1_13__36_1>

EXERCICE SUR UNE ÉQUATION NUMÉRIQUE;

PAR M. KORALEK,

Employé au Ministère de l'Agriculture, du Commerce et des Travaux publics (bureau de la Statistique générale de France).

Dans le célèbre Mémoire sur Uranus, M. Le Verrier parvient à l'équation suivante :

$$5797x^4 + 4951x^3 + 5892x^2 + 2876x + 6942 = 0,$$

(*) Le théorème est cité dans la *Géométrie analytique* de MM. Bouquet et Briot (p. 370); on peut le déduire du théorème de Desargues sur l'involution.

et il démontre que les quatre racines sont imaginaires; et c'est ce que MM. Prouhet et Vincent ont aussi démontré d'une manière plus simple (*Nouvelles Annales*, t. X); dès lors on peut appliquer à cette équation la méthode de solution que j'ai naguère indiquée (*Nouvelles Annales*, t. XI, p. 117). A cet effet, changeant x en $-x$, on obtient

$$x^4 - 2ax^3 + bx^2 - 2cx + d = 0,$$

$$2a = \frac{4951}{5797},\quad b = \frac{5892}{5797},\quad 2c = \frac{2876}{5797},\quad d = \frac{6942}{5797},$$

$$2a = 0,8540624,$$
$$b = 1,0163178,$$
$$2c = 0,4961187,$$
$$d = 1,1975159.$$

Soient $\alpha \pm \beta i$, $\alpha_1 \pm \beta_1 i$ les quatre racines de cette équation; posant

$$y = \alpha\alpha_1,$$

on obtient l'équation

$$16y^3 - 8by^2 + (b^2 - 4ac - 4d)y - abc + a^2d + c^2 = 0 \text{ (*)},$$

$$b^2 + 4ac - 4d = \frac{112016356}{5797^2},$$

$$8b = \frac{47136}{5797},$$

$$-abc + a^2d + c^2 = \frac{33554404655,5}{5797^3}.$$

Faisons $y = \dfrac{1000v}{5797}$, on a

$$(1)\quad 16v^3 - 47,136v^2 - 112,016356v + 33,5544046555 = 0,$$

$$(2)\quad v^3 - 2,946v^2 - 7,00102225v + 2,09715029159375 = 0.$$

(*) Il existe une faute typographique; au lieu de abd, il faut a^2d.

Faisant disparaître le deuxième terme en posant

$$v = z + \frac{2,946}{3} = z + 0,982,$$

on obtient

$$(3) \qquad z^3 - 9,89399425\,z - 6,67178589390625 = 0;$$

la solution trigonométrique donne (*Nouvelles Annales*, t. IX, p. 374)

$$\frac{3}{4}r^2 = \quad 9,89399425, \quad \frac{1}{4}r^3 \sin 3\varphi = -6,6717859,$$
$$r = -3,632078, \qquad \varphi = +11^\circ 16' 56'',3;$$

donc les racines de l'équation (3)

$$z_1 = r \sin\varphi, \quad z_2 = r\sin(60^\circ - \varphi), \quad z_3 = -r\sin(60^\circ + \varphi),$$

ou

$$z_1 = -0,7105916,$$
$$z_2 = -2,729390,$$
$$z_3 = +3,439982.$$

Vérification.

$$z_1 + z_2 + z_3 = 0, \quad z_1 z_2 z_3 = 6,671780;$$

donc, exact à 6 millionièmes près.

Quant aux racines de l'équation (2), on a

$$v = z + 0,982,$$

donc

$$v_1 = \quad 0,2714084,$$
$$v_2 = -1,747390,$$
$$v_3 = +4,421982;$$

et, par suite,

$$y_1 = \quad 0,04681877,$$
$$y_2 = -0,3014300,$$
$$y_3 = \quad 0,7628052.$$

Avec les valeurs de

$$y_1 = -0,3014300,$$

on a (*voyez* t. XI, p. 118)

$$\alpha = +0,8025987,$$
$$\alpha_1 = -0,3755675,$$
$$\beta = +0,8118180,$$
$$\beta_1 = +0,8819542 = \left(\frac{y_3 - y_2}{\beta}\right),$$

servant de contrôle.

Les racines de l'équation (1) sont conséquemment

$$\alpha \pm \beta i = \quad 0,8025987 \pm 0,8118180\sqrt{-1},$$
$$\alpha_1 \pm \beta_1 i = -0,3755675 \pm 0,8819542\sqrt{-1}.$$

Vérification.

On a

$$(1)\left\{\begin{array}{rl} \alpha^2 = & 0,6441647 \\ \beta^2 = & 0,6590483 \\ \alpha_1^2 = & 0,1410510 \\ \beta_1^2 = & 0,7778437 \\ 4\alpha\alpha_1 = & -1,2057199 \\ \hline \alpha^2+\beta^2+\alpha_1^2+\beta_1^2+4\alpha\alpha_1 = & 1,0163878 = b = 1,0163878 \end{array}\right.$$

très-exact.

$$2(\alpha + \alpha_1) = 0,8540624 = 2a,$$

$$(2)\quad \alpha_1(\alpha^2+\beta^2) + \alpha(\alpha_1^2+\beta_1^2) = +0,2480592 = c = 0,2480593;$$

exact à une unité décimale du septième ordre.

$$(3)\quad (\alpha^2+\beta^2)(\alpha_1^2+\beta_1^2) = 1,1975155 = d = 1,1975159;$$

très-exact.

On a donc, pour l'équation donnée, les quatre racines

$$-0,8025987 \pm 0,8118180\sqrt{-1},$$
$$0,3755675 \pm 0,8819542\sqrt{-1}.$$

Note du Rédacteur.

Sur les équations numériques à coefficients approchés.

Ce genre d'équations, les plus fréquentes qu'on rencontre dans les mathématiques appliquées, et surtout en astronomie, présente une difficulté grave. Soit l'équation

$$ax^2+bx+c=0;$$

supposons que b^2-4ac soit une quantité positive très-petite, les deux racines sont réelles. Pour peu qu'on augmente les coefficients a et c, le binôme b^2-4ac peut devenir négatif, et les racines devenir imaginaires. Le même fait se présente dans une équation quelconque. La plus légère altération dans les coefficients peut faire passer des racines de la réalité à l'imaginarité, et *vice versâ*. Lors donc qu'on a trouvé les racines réelles et imaginaires d'une équation dont les coefficients ne sont qu'approchés, comment savoir si l'on ne trouve pas d'autres résultats en poussant l'approximation plus loin? Exemple : Dans le Mémoire cité ci-dessus, on lit une équation du dixième degré, et l'on indique quatre racines réelles *approchées;* ces racines procurent un facteur de quatrième degré, à coefficients *approchés;* divisant l'équation donnée par ce facteur, on parvient à une équation du sixième degré, à coefficients *approchés*, et l'on démontre que cette équation a six racines imaginaires (*Nouvelles Annales*, t. X, p. 89 et 275); et de là l'auteur du Mémoire conclut que l'équation du dixième degré a aussi six racines imaginaires. Cette conclusion, portant sur des coefficients approchés, d'après les raisons exposées ci-dessus, ne me semble pas légitime. Ce point d'analyse, vu son importance pratique, mérite d'être éclairci. Du reste, M. Koralek a démontré directement que cette équation du dixième degré n'a que quatre racines réelles, ainsi que nous le verrons prochainement.