Nouvelles annales de mathématiques

Bibliographie

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 13 (1854), p. 349-358

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1854_1_13__349_1>

BIBLIOGRAPHIE.

Tous les ouvrages annoncés dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* se trouvent chez MALLET-BACHELIER, libraire, quai des Augustins, 55.

COURS D'ALGÈBRE SUPÉRIEURE, professé à la Faculté des Sciences de Paris par *M. J.-A. Serret*, examinateur pour l'admission à l'École Polytechnique. Deuxième édition, revue et augmentée. In-8 de 600 pages et 1 planche. Paris, 1854. — Prix : 10 francs.

L'unité dans la variété est, selon Kant, le caractère du

(*) Né à Tours en 1611, y est mort en 1678.

beau. Adoptant cette définition, nous avons devant nous un très-bel ouvrage. La théorie générale des équations, c'est l'unité, la pensée dominante. Les congruences de Gauss, les substitutions combinatoires de Cauchy et Jacobi, quelques propriétés des nombres et même des propositions de géométrie incidemment liées à la théorie générale, forment cette diversité qui facilite le travail. *Alternis facilis labor,* dit le chantre de l'agriculture. Cette Algèbre supérieure est-elle complète? Non. On y cherche vainement la théorie des déterminants qui circule aujourd'hui dans toutes les parties de la science; vainement la théorie des homogènes, des *formes,* qui présentent l'analyse sous un aspect tout nouveau. Nous signalons d'autant plus volontiers ces fâcheuses lacunes, qu'elles peuvent être facilement remplies avec ce talent d'exposition, cette supériorité de vue et de spontanéité, types du génie analytique du célèbre auteur de l'*Algèbre supérieure.* C'est un complément qu'on a droit de réclamer et qu'on peut espérer d'obtenir. Voilà ce qui est encore à désirer. Montrons ce qu'on a obtenu : Faisant l'inventaire de l'ouvrage, on verra que tous les géomètres qui voudront lire, et pour ceux-ci seuls il est possible d'écrire, pourront connaître l'état actuel de la théorie équationnelle; les travaux de Gallois, d'Abel, de Cauchy sur cette partie de la science. Mais avant d'aller plus loin, il est juste de reconnaître qu'en trente leçons le savant professeur ne pouvait pas épuiser le sujet, et qu'on lui doit de la reconnaissance pour le grand nombre de faits analytiques qu'il a décrits et développés. La première leçon (1-11) roule sur les fonctions symétriques. Toute équation a une racine. Cette proposition a été longtemps admise sans démonstration. Euler et d'Alembert ont compris qu'il fallait une démonstration, et ont présenté des essais. M. Gauss a réussi; depuis, M. Cauchy a développé le procédé de M. Gauss, et MM. Liouville et Sturm ont éclairci ce développement. Ces travaux étant maintenant exposés dans des Traités élémentaires, M Serret n'en parle pas : c'est à regretter; car un esprit aussi lucide, aussi investigateur, ne touche à rien sans l'améliorer. L'existence d'une racine entraîne l'existence d'autant de racines qu'il y a d'unités dans le degré de l'équation. Chaque racine est évidemment fonction du degré et des coefficients de l'équation : fonction d'une nature transcendante, entièrement inconnue, et qui devient algébrique pour les quatre premiers degrés, et même pour tous les degrés, lorsqu'il existe certaines relations entre les coefficients, et Gallois a le premier établi que, lorsque ces fonctions sont exprimables en radicaux, on peut toujours les trouver. Quoi qu'il en soit, les coefficients de l'équation sont des fonctions symétriques de ces racines, combinées une à une, deux à deux, etc., selon une observation de Newton. En combinant ces coefficients entre eux par voie d'addition et de multiplication, on pourrait en déduire, mais d'une manière pénible, toute fonction symétrique en fonction des coefficients de l'équation. Newton a indiqué la méthode récurrente pour trouver directement la somme des puissances des racines; et comme on peut toujours trouver le terme général d'une série récurrente, on a donc aussi la méthode *indépendante*. Mais Waring a découvert par induction la loi, et l'a ensuite démontrée en faisant voir que, si elle est vraie pour un degré donné, elle subsiste aussi pour le degré suivant; mais M. Serret, dans la Note (page 431), dérive cette loi d'une formule que Lagrange a donnée pour calculer la somme des puissances négatives des racines, formule qu'il déduit du coefficient de x^n dans le développement selon les puissances croissantes de x, de $\frac{1-f'x}{u-x+f(x)}$,

u est une constante. Remplaçant x par $\frac{1}{x}$ et appliquant la formule de Lagrange, on parvient d'une manière assez laborieuse à celle de Waring.

Toute cette Note appartient à M. Genocchi (*Nouvelles Annales*, tome XII, page 260). Pourquoi ne l'avoir pas cité? Le même analyste nous a envoyé une nouvelle démonstration fort simple, très-ingénieuse, d'un théorème de M. Cauchy, que nous donnerons par la suite (*ibid*, page 269), ainsi que ce beau théorème, que nous devons à M. le professeur Brioschi :

Soit l'équation

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n = 0,$$

on a

$$S_r = (-1)^r \begin{vmatrix} a_1, & 1, & 0, 0 \ldots 0 \\ 2a_2, & a_1, & 1, 0 \ldots 0 \\ 3a_3, & a_2, & a_1, 1, 0 \ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ (r-1)a_{r-1}, & a_{r-2}, & a_{r-3} \ldots 1 \\ ra_r, & a_{r-1}, & a_{r-2} \ldots a_1 \end{vmatrix}.$$

Lorsque $r > n$, on fait

$$a_{n+1} = a_{n+2} = a_{n+3} = \ldots a_r = 0.$$

Les séries récurrentes étant représentées par une suite indéfinie d'équations périodiques du premier degré, les déterminants cramériens apparaissent naturellement. En combinant par additions et multiplications les sommes des puissances semblables, on obtient l'expression des fonctions symétriques *entières* en fonctions de ces sommes. La forme *indépendante* a été donnée par Waring (*Nouvelles Annales*, tome VIII, page 77). M. Serret démontre cette formule de la même manière que Waring, en faisant usage d'une notation différente (Note II, page 442). On trouvé

$$\sum x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3} \ldots x_i^{\alpha_i}$$

$$= \sum (-1)^{i-\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3\ldots\lambda_i} \Gamma(2)^{\lambda_2} \Gamma(3)^{\lambda_3} \ldots \Gamma i^{\lambda_i} \mathrm{T}(\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_i);$$

$x_1, x_3, \ldots, x_i$ sont i racines de l'équation.

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i$ sont des nombres positifs entiers; les sommes S peuvent avoir un seul indice S_{α_1}. S_{α_2}, ou bien deux indices $S_{\alpha_1+\alpha_2}$, $S_{\alpha_1+\alpha_3}$, etc., ou trois indices et au plus i indices $S_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_i}$. Considérons un seul terme de la somme Σ cherchée. Représentons par λ_1 le nombre des S à un indice; par λ_2 le nombre des S à deux indices, et ainsi de suite; comme il n'y a en tout que i indices et que nous supposons ces indices tous différents les uns des autres, on a évidemment

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 + \ldots + i\lambda_i = i,$$

$\mathrm{T}(\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_i)$ représente la fonction symétrique en S du terme qui renferme λ_1 fois des S à un indice; λ_2 fois des S à deux indices, etc. Par exemple, soit $i = 4$; $\mathrm{T}(1, 0, 1, 0)$ a pour type $S_{\alpha_1} S_{\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4}$ et pour développement

$$S_{\alpha_1} S_{\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4} + S_{\alpha_2} S_{\alpha_1+\alpha_3+\alpha_4}$$
$$+ S_{\alpha_3} S_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4} + S_{\alpha_4} S_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}.$$

Les Γ désignent des produits continuels : ainsi

$$\Gamma(4) = 1.2.3.4;$$

et le signe Σ du second membre se rapporte à l'équation en i donnée ci-dessus. Il est évident que λ_i ne peut avoir d'autres valeurs que zéro et 1, et dans ce dernier cas tous les autres λ sont nuls. Cette notation rend plus facile la démonstration de Waring, savoir, que si la formule est vraie pour i, elle subsiste également pour $i+1$. N étant le nombre de termes qui composent T $(\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_i)$, on a

$$N = \frac{\Gamma(i+1)}{\Gamma(2)^{\lambda_1}\,\Gamma(3)^{\lambda_2}\ldots\Gamma(i+1)^{\lambda_i}\,\Gamma(\lambda_1+1)\,\Gamma(\lambda_2+1)\ldots\Gamma(\lambda_{i+1})}.$$

Si, parmi les indices, μ_1 sont égaux à α_1, μ_2 à α_2, etc., il faudra diviser le second membre de l'équation ci-dessus par $\Gamma(\mu_1+1)\,\Gamma(\mu_2+2)$, etc.

Si l'on a

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 \ldots = \alpha_i,$$

on obtient

$$\Sigma\,(x_1 x_2 \ldots x_i)^{\alpha}$$

$$= \Sigma \frac{(-1)^{i-\lambda_1-\lambda_2\ldots\lambda_i}}{1^{\lambda_1}.\,2^{\lambda_2}\ldots i^{\lambda_i}\,\Gamma(\lambda_1+1)\,\Gamma(\lambda_2+1)\ldots\Gamma(\lambda_i+1)}\,S_{\alpha}^{\lambda_1} S_{2\alpha}^{\lambda_2}\ldots S_{i\alpha}^{\lambda_i}.$$

Σ est toujours relatif à l'équation $\lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots + i\lambda_i = i$, et au moyen de cette dernière formule, on peut calculer un coefficient quelconque de l'équation donnée, en fonction des sommes des puissances semblables des racines; il suffit de faire $\alpha = 1$.

Nous ajouterons ici une observation qui est souvent utile. Soient

$$x - x_1 = y_1, \quad x - x_2 = y_2, \ldots, \quad x - x_4 = y_4, \ldots;$$

on peut trouver en fonction de x, une fonction symétrique quelconque des y; car, dans l'équation

$$(z - y_1)(z - y_2)\ldots(z - y_4)\ldots = 0,$$

tous les coefficients sont connus, au moyen des dérivées de l'équation donnée.

La seconde leçon (15-32) est une continuation. On indique la méthode de Waring pour calculer une fonction symétrique entière en fonction des coefficients de l'équation, mais pour des cas particuliers seulement, et on ne démontre pas la formule générale (voir *Nouvelles Annales*, t. VIII, p. 78).

Méthode de M. Cauchy pour calculer une fonction symétrique entière; très-belle sous le point de vue théorique, mais d'une pratique fatigante: celle de MM. Desmaret et Abel Transon semble préférable de beaucoup (*Nouvelles Annales*, t. IX, p. 75).

Le dernier terme de l'équation aux carrés des différences occupe une place importante dans certaines recherches analytiques et géométriques (*).

On indique le procédé de M. Cauchy pour déduire ce dernier terme relatif à l'équation de degré n du terme analogue et relatif à l'équation de degré $n - 1$, et dans une Note (p. 472) on lit une méthode *nouvelle*, qui semble fondée sur la méthode indiquée par M. Joachimsthal (*Nouvelles Annales*, t. IX, p. 98) et même ne pas en différer essentiellement.

La troisième leçon (page 33-48) contient le moyen de calculer l'équation qui a pour racines une fonction rationnelle et *non symétrique* des racines d'une équation donnée, et la méthode de Lagrange pour calculer l'équation aux carrés des différences. On établit ce théorème donné et démontré par Wantzel :

Toute fonction rationnelle non entière de plusieurs racines d'une équation peut être remplacée par une fonction entière des mêmes racines (Nouvelles Annales, tome IV, page 61, note).

Application à l'élimination, degré de l'équation résul-

(*) Le *discriminant* des géomètres anglais.

tante, et dans les cas particuliers, la méthode Minding pour déterminer ce degré (Note VI, page 465). Cette méthode est fondée sur le parallélogramme de Newton, analytiquement arrangé par Lagrange (LACROIX, *Calcul différentiel*, tome I, page 108, 2e édition; 1810). Application à deux équations à deux inconnues (*). On choisit pour exemple deux équations incomplètes, l'une du sixième degré et l'autre du treizième, et le procédé Minding donne une équation finale du cinquante-huitième degré (page 475), et l'auteur ajoute : « La limite assignée par le théorème de Bezout est 6.13 ou 78 ». Cela est vrai pour le théorème *général*, mais Bezout indique aussi les cas particuliers où le degré s'abaisse. Il est à regretter que M. Serret ne se soit pas enquis de la méthode d'élimination de Bezout, dite du *polynôme-multiplicateur*, qui me semble la plus générale, la plus exacte, la plus conforme à l'état de la question; car l'équation finale n'est autre chose que la somme de toutes les équations données multipliées chacune par un polynôme tel, que dans l'addition toutes les inconnues, hormis une seule, disparaissent. La détermination des degrés et des coefficients de ces polynômes multiplicateurs ne dépend que de la résolution de systèmes d'équations du premier degré; les autres méthodes en usage sont même défectueuses en ce qu'elles ne donnent pas les valeurs infinies qui correspondent à des valeurs finies.

Exemple. Soient deux équations complètes du second degré à deux inconnues x et y; l'équation finale en x et celle en y ont respectivement pour premiers termes Mx^4, My^4, de sorte que, lorsque $M = 0$, x^4 et y^4 disparaissent simultanément, et les équations ne peuvent

---

(*) Voir le théorème de M. Finck (*Nouvelles Annales*, tome IV, pages 199 et 201).

désigner le cas où x^4 disparaissant, y^4 reste. Cela n'arrive pas dans la méthode de Bezout.

Avant de quitter ce sujet, je solliciterai l'explication d'une difficulté relative à l'élimination.

Soient n équations *complètes* à n *inconnues*: la première équation de degré m_1, la deuxième de degré m_2,..., la $n^{ième}$ de degré m_n; les coefficients sont présentés par des *lettres*. Supposons que l'on ait éliminé $n - 1$ inconnues. L'équation finale, étant la plus générale possible, doit s'appliquer à tous les cas particuliers et les comprendre tous. Or c'est un cas particulier lorsque l'équation de degré m_1 est le produit de m_1 facteurs linéaires; l'équation m_2, le produit de m_2 facteurs linéaires, et ainsi des autres; dans ce cas, il est de toute évidence que le système admet $m_1\, m_2\, m_3 \ldots m_n$ solutions, car on a autant de systèmes d'équations du premier degré. Chaque inconnue est donc susceptible d'autant de valeurs et *pas davantage*, et l'équation finale générale devant donner toutes ces valeurs, doit donc monter *au moins* au degré $m_1\, m_2\, m_3 \ldots m_n$. Si l'équation finale *générale* était d'un degré plus élevé

$$m_1\, m_2\, m_3 \ldots m_n + q,$$

il faut que dans le cas particulier que nous avons considéré, on ait $q = 0$, c'est-à-dire les q premiers termes devraient disparaître; ce qui annonce qu'outre les $m_1\, m_2 m_3 \ldots m_n$ valeurs, il y a encore q valeurs infinies: les systèmes d'équations linéaires seraient donc satisfaits par plus de $m_1\, m_2\, m_3 \ldots m_n$ valeurs, ce qui est impossible; donc q est zéro dans le cas général, et l'équation générale finale est nécessairement de degré $m_1\, m_2\, m_3 \ldots m_n$. Voici maintenant ma difficulté. Ces considérations si simples se sont sans doute présentées à bien des géomètres qui ne les ont pas produites, parce que le raisonnement renferme quelque vice. Quel est ce vice ?

On a omis une propriété fondamentale des fonctions symétriques, démontrée par M. A. Transon (*Nouvelles Annales*, tome IX, page 83), propriété essentielle qui fait connaître le *degré* des lieux géométriques.

(*La suite prochainement.*)
