PHILIPPE GILBERT

Seconde solution de la question 273

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 13 (1854), p. 33-35
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1854_1_13__33_0>

SECONDE SOLUTION DE LA QUESTION 273

(voir t. XII, p. 441);

PAR M. GILBERT (PHILIPPE),
Élève à l'Université de Louvain.

Le triangle ABC a un sommet fixe A, un angle constant A, les sommets B et C sont sur une droite fixe. Quelle est l'enveloppe du cercle circonscrit au triangle?

Soit XX′ la droite fixe. Du point A, sur cette droite, abaissons la perpendiculaire AD; soient O le centre du cercle circonscrit à ABC, OP perpendiculaire sur XX′, et tirons OA, OB, OC. On a

$$OA = OB = OC,$$

$$\text{angle } BOP = \frac{1}{2} \text{ angle } BOC = \text{angle } BAC = A,$$

$$OP = OB \cos BOP = OA \cos A,$$

d'où

$$\frac{OA}{OP} = \frac{1}{\cos A}.$$

Le rapport $\frac{OA}{OP}$ est constant et > 1; donc *le lieu des centres* O *est une hyperbole dont* A *est un foyer,* XX′ *la directrice correspondante, et dans laquelle le rapport de l'excentricité* $2c$ *à l'axe réel* $2a$ *est égal à* $\frac{1}{\cos A}$. Son axe est dirigé suivant AD.

Prenant sur AD un point S tel, que $\frac{SA}{SD} = \frac{1}{\cos A}$, S sera l'un des sommets de l'hyperbole.

On a ensuite

$$c : a = SA : SD,$$

d'où

$$c - a : a = \mathrm{SA} - \mathrm{SD} : \mathrm{SD}, \quad c - a = \mathrm{SA};$$

donc

$$a = \frac{\mathrm{SA}\ \mathrm{SD}}{\mathrm{SA} - \mathrm{SD}}.$$

Portant cette longueur sur l'axe, à partir du sommet S, on aura le centre E de l'hyperbole, et le *second foyer* A′, en prenant EA′ = EA sur cette même droite. La branche de courbe qui répond au foyer A correspond aux positions de l'angle A, dans lesquelles ses deux côtés ou les deux prolongements viennent rencontrer XX′, et l'autre branche aux positions où l'un des côtés et le prolongement de l'autre déterminent le triangle ABC.

Cela posé, si le centre O du cercle circonscrit est sur la première branche, on a, par la propriété de l'hyperbole,

$$\mathrm{OA}' - \mathrm{OA} = 2a, \quad \text{ou} \quad \mathrm{OA}' = \mathrm{OA} + 2a;$$

sur la seconde, on a

$$\mathrm{OA} - \mathrm{OA}' = 2a, \quad \text{ou} \quad \mathrm{OA}' = \mathrm{OA} - 2a.$$

Donc, *si du foyer* A′ *comme centre, et d'un rayon* $2a$, *on décrit un cercle, il sera tangent au cercle mobile,* car la distance des centres sera égale à la somme des rayons dans le premier cas, à leur différence dans le second. *Le cercle est donc l'enveloppe demandée.*

Remarques. On y arrive aussi en observant que la corde d'intersection de deux cercles infiniment voisins est perpendiculaire à la sécante OO′ qui passe par leurs centres, et qui a pour limite la tangente en O à l'hyperbole, de sorte que le point d'intersection limite, qui appartient à l'enveloppe, est sur la perpendiculaire AT à cette tangente en O, à une distance TM = TA. On retrouve ainsi le même cercle.

Si $A = 90$ degrés, $\cos A = 0$, $\frac{c}{a} = \infty$, $SD = 0$, l'hyperbole se réduit à la droite XX', et l'enveloppe à un point, symétrique au point A, par rapport à XX'.
