Nouvelles annales de mathématiques

Prouhet

Étude géométrique sur les reptoires (suite et fin)

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 13 (1854), p. 335-348

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1854_1_13__335_0>

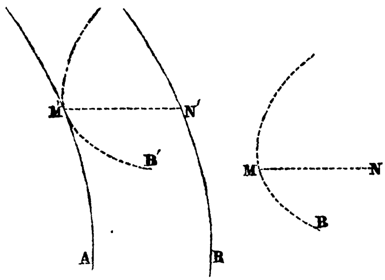
ÉTUDE GÉOMÉTRIQUE SUR LES REPTOIRES (suite et fin)

(voir p. 274);

PAR M. PROUHET,
Professeur.

PROBLÈME VII. *Connaissant la reptoire et l'une de ses génératrices, trouver l'autre.*

Fig. 4.



Soient A la courbe fixe et R la reptoire (*fig.* 4). Supposons le problème résolu, et soit B la courbe rampante placée quelque part dans le plan, avec l'orientation qu'elle conserve dans tout le cours du mouvement. Appelons N le point décrivant.

Lorsque le point M vient en contact en un point M' de A, la droite NM coïncide avec N' M' qui lui est égale et parallèle. En outre, les tangentes aux deux courbes aux points M' et N' sont parallèles. De là la construction suivante :

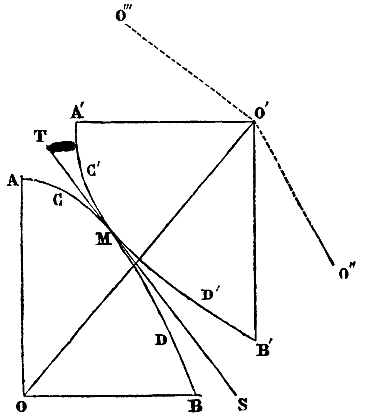
Ayant pris à volonté un point N' *sur la reptoire et un point* N *sur le plan, cherchez sur la courbe* A *un point* M' *tel, que la tangente à la courbe* A *en ce point soit parallèle à la tangente à la reptoire en* N'. *Menez* NM *égale et parallèle à* N' M' : M *sera un point de la courbe* B.

Remarques. I. Cette construction renversée permet de tracer la reptoire par points sans faire mouvoir la figure B.

II. Il y a réciprocité entre les courbes A, B et R. Si l'on obtient R en faisant ramper *extérieurement* B sur A, on aura A ou B en faisant ramper intérieurement B ou A sur R.

§ II. *Du mouvement de reptation sous-contraire.*

Fig. 5.



Définitions. I. Soient (*fig.* 5) AB un arc de courbe; M *son milieu d'amplitude,* c'est-à-dire le point qui le partage en deux arcs d'égale amplitude; TS la tangente à AB au point M; A′B′ un arc symétrique de AB par rapport à TS. Si l'on fait ramper A′B′ sur son égal AB, on dira que l'arc AB rampe *sous-contrairement* sur lui-même.

II. La reptoire engendrée sera dite elle-même une *reptoire sous-contraire.*

III. Le point M sera dit *centre de reptation.*

Remarques. I. Le mouvement de reptation amène tour à tour A′ en B et B′ en A.

II. Si l'on fait ramper une courbe fermée B sur son égale A, le mouvement de reptation pourra être considéré comme sous-contraire; car il est clair que les diverses courbes symétriques de A par rapport aux tangentes de celle-ci présentent toutes les orientations possibles, et, par suite, qu'il y en a une orientée comme la courbe B. Il n'en est pas toujours ainsi pour une courbe ouverte.

THÉORÈME VII. *Lorsque la courbe* AB (*fig.* 5) *rampe sous-contrairement sur elle-même, si l'on prend pour point décrivant le point de rencontre des normales extrêmes, la reptoire engendrée sera symétrique par rapport à la bissectrice* OO' *de l'angle* AOB *des normales extrêmes.*

Soient MD et MC deux arcs d'égale amplitude pris sur la courbe AB; MD', MC' deux autres arcs symétriques des premiers par rapport à TS, et, par conséquent, aussi d'égale amplitude.

Le point C' étant amené en D par le mouvement de reptation, O' sera amené en O'' à l'extrémité d'une droite $O'O''$ égale et parallèle à $C'D$. De même, D' étant amené en C, O' passera à l'extrémité de la droite $O'O''$ égale et parallèle à $D'C$.

Mais $C'D = CD'$, et, de plus, ces deux droites sont également inclinées sur l'axe de symétrie TS.

Donc $O'O''$ et $O'O'''$ sont égales et également inclinées sur OO'. Donc O'' et O''' sont symétriques par rapport à OO', et, par suite, la reptoire a tous ses points symétriques deux à deux par rapport à l'axe OO'. C. Q. F. D.

Remarques. I. Les deux normales extrêmes de la reptoire sont égales entre elles, et égales à la somme des normales extrêmes OA et OB de la courbe primitive.

II. La normale OO' de la reptoire est double de la perpendiculaire abaissée sur la tangente menée à AB par le milieu d'amplitude de cet arc.

III. Si l'on imagine une courbe, telle qu'une ellipse, ayant deux axes de symétrie et quatre sommets, si l'on prend pour centre de reptation le milieu d'amplitude de l'arc compris entre deux sommets consécutifs, on obtiendra une reptoire ayant quatre axes de symétrie et huit sommets. Cette reptoire, qu'on peut appeler du premier ordre, fournira une reptoire du second ordre ayant huit axes de symétrie et seize sommets, et ainsi de suite.

IV. Soit 2 A la longueur commune des grands axes de symétrie de la $n^{ième}$ reptoire, et 2 B la longueur des petits axes. Si 2 A est un *maximum absolu* et 2 B un *minimum absolu* parmi les diamètres de la reptoire, alors il est clair que celle-ci sera comprise entre deux circonférences de rayons A et B. Ces deux circonférences, divisées par 2^n, donneront deux limites comprenant la courbe primitive.

Pour que A soit un maximum absolu et B un minimum absolu, parmi les rayons vecteurs de la reptoire (le pôle étant au centre de la courbe primitive), il suffit que le rayon vecteur soit continuellement croissant ou décroissant d'un sommet de la reptoire au sommet voisin. Mais cette condition n'est pas indispensable.

Ces restrictions ne sont pas mentionnées par Bernoulli pages 437 et suivantes, page 445. A cette époque (1707), il n'applique ses théorèmes d'approximation qu'à des arcs de courbe avec lesquels il parvient à composer une courbe de forme elliptique, ce qui n'est possible que si l'amplitude est une partie aliquote de 2π. On verra plus loin qu'on peut se passer de ce procédé, et Bernoulli lui-même paraît y avoir renoncé.

Problème VIII. *Transformer un arc de courbe en d'autres arcs d'égale longueur, mais d'espèces différentes.*

En faisant ramper sous-contrairement l'arc proposé, on obtient une reptoire double en longueur, mais partagée en deux parties égales par un axe de symétrie. Une de ces parties résout le problème proposé. En opérant sur ce second arc comme sur le premier, on en obtiendra un troisième, et ainsi de suite.

On résout encore le problème en faisant ramper *intérieurement* l'arc donné sur un autre ou semblable et de longueur double.

Remarques. I. Si la courbe proposée est algébrique, il en sera de même de la reptoire, car l'équation de cette dernière s'obtiendra par une élimination entre des équations algébriques.

II. Lorsque la courbe proposée est un cercle, la reptoire est aussi un cercle, et l'une des conditions du problème n'est plus remplie; mais on peut procéder à cet égard de la manière suivante :

Soit $x^2 + y^2 = a^2$ l'équation d'un cercle; construisons une courbe donnée par les équations

$$\zeta = \frac{3a^2x - x^3}{3a^2}, \quad \eta = \frac{y^3}{3a^2}, \quad x^2 + y^2 = a^2.$$

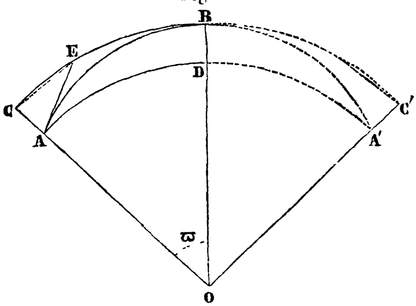
Le calcul montre que la différence entre la longueur d'un arc de la nouvelle courbe commençant à l'axe des y et celle d'un arc du cercle commençant au même axe et terminé au point (x, y) s'exprime par une quantité algébrique. Quand $y = 0$, la partie algébrique disparaît, et l'arc de la nouvelle courbe est égal au huitième de la circonférence proposée, ou à une circonférence ayant pour rayon $\frac{a}{8}$, rayon qu'on peut considérer comme donné.

III. En faisant ramper l'un sur l'autre deux arcs semblables à un arc donné a, l'un égal à ma, l'autre à na, on obtiendra une reptoire égale à $(m+n)a$, ce qui permettra de transformer un arc en un autre, en général d'espèce différente, ayant un rapport donné avec l'arc proposé, et cela d'une infinité de manières.

Théorème IX. *Soient* AB [*fig.* 6 (*)] *un arc convexe;* OA, OB *ses normales extrêmes:* ϖ, *son amplitude. Si l'on suppose qu'un rayon vecteur, couché d'abord sur* OA *et se mouvant vers* OB, *en ayant son extrémité sur l'arc, soit toujours croissant, on aura*

$$\text{arc AB} < \varpi . \text{OB}. \tag{1}$$
$$\text{arc AB} > \varpi . \text{OA}. \tag{2}$$

Fig. 6.



Décrivons du point O, avec OA pour rayon, l'arc de cercle AD qui rencontre OB en D, et, avec OB comme rayon, l'arc BC qui rencontre OA prolongé en C. D'après l'hypothèse, l'arc AB devra être compris tout entier dans le quadrilatère mixtiligne ACBD.

Si l'on mène AE tangente à l'arc AB et, par suite, perpendiculaire à AO, on aura

$$\text{arc AB} < \text{AE} + \text{arc EB}.$$

Mais la perpendiculaire AE étant moindre que l'oblique EC et, à plus forte raison, que l'arc CE, on aura

$$\begin{aligned} \text{arc AB} &< \text{arc CE} + \text{arc EB}, \\ &< \text{arc CB}, \end{aligned}$$

ou bien

$$\text{arc AB} < \varpi . \text{OB}.$$

(*) Il s'est glissé dans cette figure quelques inexactitudes que le lecteur corrigera facilement en s'aidant des indications du texte.

Pour démontrer la seconde partie, replions la figure autour de OB : nous aurons, parce que l'arc ABA′ enveloppe l'arc ADA′,

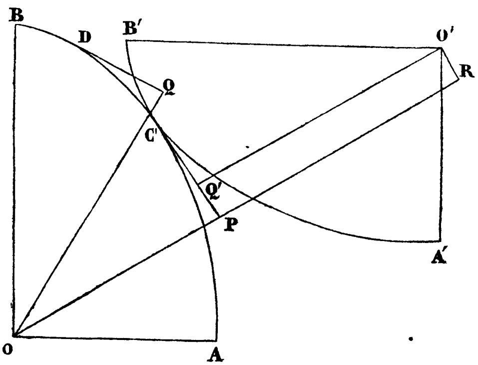
$$\text{arc ABA}' > \text{arc ADA}',$$
$$2\,\text{arc AB} > 2\,\text{arc AD},$$
$$\text{arc AB} > \varpi.\text{OA}.$$

Remarques. I. Si du point O on abaisse des perpendiculaires sur les diverses tangentes à l'arc AB, le lieu des pieds de ces perpendiculaires sera un arc tangent à AB aux points A et B, et dont tous les autres points seront en dehors de AB.

II. Le rayon vecteur du nouvel arc sera, comme celui de l'arc primitif, croissant de OA vers OB.

Cette remarque, conséquence de la règle (*), pour mener les tangentes à ces sortes de courbes, nous dispensera plus tard de chercher l'équation de la reptoire.

Fig. 7.



LEMME. — AB (*fig.* 7) *est un arc de courbe d'une amplitude* ϖ, *et dont les normales extrêmes se rencontrent*

(*) RICHARD, *Nouvelles Annales*, tome II, page 436.

au point O. AC *et* AD *sont des arcs d'amplitudes complémentaires* α *et* $\varpi - \alpha$. *Le point* O' *est le point de la reptoire sous-contraire qui correspond au point* C. *Enfin,* OP, OQ, OR *sont des perpendiculaires abaissées sur les tangentes à* AB *et à sa reptoire, menées par les points* C, D *et* O'. *Je dis qu'on a*

$$OR = OP + OQ.$$

En effet, dans le mouvement de reptation, la tangente DQ vient coïncider avec la tangente CP et OQ avec O' Q' perpendiculaire à CP. D'un autre côté, O' R tangente à la reptoire est parallèle à CP. On a donc, à cause du rectangle R O' Q' P,

$$OR = OP + PR = OP + O'Q' = OP + OQ. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Remarques. I. Si l'on pose

$$OP = P(\alpha), \quad OQ = P(\varpi - \alpha), \quad OR = P_1(\alpha),$$

le théorème que nous venons de démontrer s'exprimera par l'égalité

$$P_1(\alpha) = P(\alpha) + P(\varpi - \alpha).$$

II. Supposons que la première reptoire en engendre une seconde en rampant sous-contrairement sur elle-même, le centre de reptation étant le milieu d'amplitude de l'arc compris entre deux sommets consécutifs; que la seconde en engendre de la même manière une troisième, et ainsi de suite. Désignant par $P_n(\alpha)$ la perpendiculaire abaissée du centre sur une tangente à la n^{ieme} reptoire, nous aurons

$$P_2(\alpha) = P_1(\alpha) + P_1\left(\frac{\varpi}{2} - \alpha\right),$$

puisque $\frac{\varpi}{2}$ est l'amplitude d'un élément (*) de la pre-

(*) Nous entendons ici par element d'une reptoire l'arc compris entre deux sommets consecutifs mière reptoire; mais

$$P_1(\alpha) = P(\alpha) + P(\varpi - \alpha),$$

$$P_1\left(\frac{\varpi}{2} - \alpha\right) = P\left(\frac{\varpi}{2} - \alpha\right) + P\left(\frac{\varpi}{2} + \alpha\right).$$

Donc

$$P_2(\alpha) = P(\alpha) + P\left(\frac{\varpi}{2} - \alpha\right) + P\left(\frac{\varpi}{2} + \alpha\right) + P(\varpi - \alpha).$$

On trouvera, pour la $n^{ième}$ reptoire, en posant $2^n = 2m$,

$$P_n(\alpha) = P(\alpha) + P\left(\frac{\varpi}{m} - \alpha\right) + P\left(\frac{\varpi}{m} + \alpha\right)$$
$$+ P\left(\frac{2\varpi}{m} - \alpha\right) + P\left(\frac{2\varpi}{m} + \alpha\right) + \ldots$$
$$+ P\left(\frac{m-1}{m}\varpi + \alpha\right) + P(\varpi - \alpha).$$

III. Si l'on suppose alternativement $\alpha = 0$, $\alpha = \dfrac{\varpi}{2m}$, on aura

$$P_n(0) = 2\left[\begin{array}{l} \frac{1}{2}P(0) + P\left(\frac{2\varpi}{2m}\right) + P\left(\frac{4\varpi}{2m}\right) \\ + P\left(\frac{6\varpi}{2m}\right) + \ldots + P\left(\frac{2m-2}{2m}\varpi\right) + \frac{1}{2}P(\varpi) \end{array}\right],$$

$$P^n\left(\frac{\varpi}{2m}\right) = 2\left[P\left(\frac{1\varpi}{2m}\right) + P\left(\frac{3\varpi}{2m}\right) + \ldots + P\left(\frac{2m-1}{2m}\varpi\right)\right].$$

Théorème X. *Les mêmes hypothèses et notations étant conservées, comme aux théorèmes précédents, l'arc* AB *est compris entre deux arcs de cercle d'amplitude* ϖ *et ayant respectivement pour rayons*

$$\frac{P_n(0)}{2m}, \qquad \frac{P_n\left(\frac{\varpi}{2m}\right)}{2m},$$

pourvu que la longueur désignée par $P_n(\alpha)$ *soit constamment croissante ou décroissante lorsque l'angle* α *varie de* 0 *à* $\dfrac{\pi}{2m}$.

En effet, si $P_n(\alpha)$ est constamment croissant ou décroissant (*théor.* IX, *Rem.* II), il en résulte que le rayon vecteur de la $n^{ième}$ reptoire est lui-même constamment croissant ou décroissant pour tout un élément de cette reptoire : ses valeurs extrêmes sont donc $P_n(0)$ et $P_n\left(\frac{\varpi}{2m}\right)$, et, comme l'élément de la $n^{ième}$ reptoire a pour amplitude $\frac{\varpi}{2m}$, on en conclut que cet arc est compris entre

$$\frac{\varpi}{2m} P_n(0) \quad \text{et} \quad \frac{\varpi}{2m} P_n\left(\frac{\varpi}{2m}\right),$$

ce qui démontre le théorème, puisque l'élément de la $n^{ième}$ reptoire est égal à AB et que les limites précédentes peuvent s'écrire

$$\varpi \cdot \frac{P_n(0)}{2m} \quad \text{et} \quad \varpi \cdot \frac{P_n\left(\frac{\varpi}{2m}\right)}{2m}.$$

Remarques. I. $\frac{P_n\left(\frac{\varpi}{2m}\right)}{2m}$ est une moyenne arithmétique entre les longueurs des perpendiculaires abaissées du point O sur les côtés de rang pair d'un polygone équiangle de $2m+1$ côtés circonscrit à AB. $\frac{P_n(0)}{2m}$ représente aussi une moyenne, en ne comptant que pour un seul terme la demi-somme des normales extrêmes.

Du théorème sur les rayons de courbure des reptoires (4, II), il résulte que pour des reptoires d'un ordre de plus en plus élevé la courbure diminue de plus en plus, de sorte qu'un élément de la reptoire diffère de moins en moins d'une ligne droite ou d'un arc de cercle de très-grand rayon. On voit donc que si n augmente indéfiniment, la fonction $P_n(\alpha)$ doit finir par remplir la condition énoncée, c'est-à-dire être toujours croissante ou décroissante quand on passe d'un sommet de la $n^{ième}$ reptoire au sommet voisin. Le théorème est donc vrai pour $n = \infty$, et, par suite,

Un arc de courbe AB, remplissant les conditions énoncées plus haut, *est égal à un arc de cercle de même amplitude et ayant pour rayon la limite de la moyenne des perpendiculaires abaissées du centre d'amplitude de l'arc* AB *sur les côtés d'un polygone équiangle circonscrit à cet arc.*

II. Dans tout ce qui précède on a supposé $m = 2^{n-1}$; mais, en écartant comme nous l'avons toujours fait, le cas des points singuliers, des courbes sinueuses, etc., les diverses fonctions que nous avons considérées doivent être ou finir par être toujours croissantes ou toujours décroissantes dans les limites où nous les faisons varier. De sorte que, si elles remplissent les conditions énoncées pour $m = 2^{n-1}$, quel que soit n, on conçoit qu'elles les rempliront encore lorsqu'on supposera m égal à un nombre entier quelconque.

III. Soit AB $= s$ un arc d'amplitude ϖ. Partageons-le en m parties d'égale amplitude $\frac{\varpi}{m}$, et désignons par p la perpendiculaire abaissée du centre d'amplitude sur la tangente menée en l'un des points de division. On aura, d'après ce qui précède,

$$s = \lim \varpi \cdot \frac{\Sigma p}{m} = \lim \Sigma p \cdot \frac{\varpi}{m},$$

et, par conséquent,

$$s = \int_0^{\varpi} p\, d\omega.$$

Cette formule a été donnée par Bernoulli (tome IV, page 89) sans démonstration; mais il dit qu'elle est une conséquence de la théorie des reptoires, ce qui montre qu'il connaissait le théorème X, dont l'énoncé ne se trouve pas cependant dans ses OEuvres.

Lorsque les perpendiculaires ne sont pas abaissées du centre d'amplitude, il faut, pour avoir la longueur de l'arc s, joindre à l'intégrale précédente une partie algébrique, que le lecteur trouvera sans peine.

Cette formule se trouve aussi dans Legendre (*Fonctions elliptiques*, tome II, *appendice*). M. Faure l'a aussi démontrée dans les *Nouvelles Annales*, t. XI, p. 397, à propos d'une formule relative aux surfaces.

Applications. I. Lorsque la courbe AB est un quart d'ellipse, on trouve, en désignant ses axes par $2a$ et $2b$,

$$P(\alpha) = \sqrt{a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha},$$

et la fonction $P_n(\alpha)$ se décompose en binômes, dont chacun est décroissant de $\alpha = 0$ à $\frac{\varpi}{m}$ si l'on a $a > b$. Le théorème X est donc applicable à l'ellipse, quel que soit n; mais on peut le présenter sous une autre forme.

Prenons sur une même droite (*) $CD = b$, $DE = a$, et décrivons sur CE comme diamètre une demi-circonférence. Soit l'arc $CM = 2\alpha$; on trouvera facilement que $DM = \sqrt{a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha} = P(\alpha)$.

Cela posé, partageons la demi-circonférence en $2^n = 2m$ parties égales. Numérotons les points de division à partir de A, $0, 1, 2, \ldots, 2m$, et désignons par p_0, p_1, etc., les

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

rayons vecteurs correspondants. Enfin soient

$$M_0 = \frac{\frac{1}{2}p_0 + p_2 + p_4 + \ldots + \frac{1}{2}p_{2m}}{m},$$

$$M_1 = \frac{p_1 + p_3 + \ldots + p_{2m-1}}{m};$$

le périmètre entier de l'ellipse sera compris entre deux circonférences ayant pour rayons M_0 et M_1.

II. De là ce corollaire : La moyenne des distances d'un point pris dans l'intérieur d'un cercle à tous les sommets d'un polygone régulier d'une infinité de côtés inscrits dans ce cercle, s'obtient en divisant par 2π le périmètre d'une ellipse qui aurait pour demi-axes la plus grande et la plus petite distance du point considéré à la circonférence

Le cas de $b = 0$ fournit aussi un théorème intéressant que nous n'énonçons pas et qui permet d'approcher indéfiniment de π.

III. En appliquant le théorème X à des courbes rectifiables, on aura, suivant la remarque de Leibnitz, de nouveaux moyens d'approcher du rapport de la circonférence au diamètre.

Ces exemples suffisent pour montrer les avantages que peut offrir la théorie de Bernoulli, comme instrument de recherches ou de démonstration. Au reste, suivant une remarque qui nous a été communiquée par M. Terquem, cette théorie est susceptible d'une grande extension.

Si, sur une surface S, on trace une courbe C, et qu'on fasse mouvoir une surface S′ parallèlement à elle-même, de manière qu'elle touche constamment S en un point de la courbe C, chaque point de S′ décrira une courbe, gauche en général, et qui devra jouir de propriétés analogues à celles des reptoires. Si l'on imagine que la surface S soit engendrée par le mouvement d'une courbe C qui changerait de forme et de position suivant une loi donnée, et qu'on fasse tour à tour ramper S′ suivant les diverses génératrices de S, l'ensemble des reptoires engendrées par un même point de S′ formera une surface qu'on pourrait nommer *reptoriale*, et dont il serait intéressant d'étudier les relations avec les deux surfaces qui lui donnent naissance. Peut-être reviendrons-nous sur ce sujet.