NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

PEPIN

Solution de la question 257

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 13 (1854), p. 320-323

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1854_1_13__320_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 257

(voir t. XI, p. 368);

PAR M. L'ABBÉ PEPIN,
du petit Séminaire d'Iseure.

Réduire à des quadratures simples la valeur de l'intégrale triple

$$S = \int\int\int e^{-(x^2+y^2+z^2)} x^p y^q z^r \, dx \, dy \, dz,$$

où les limites des variables sont déterminées d'après l'inégalité

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqq 1. \qquad \text{(STREBOR.)}$$

1. Remplaçons $\frac{x^2}{a^2}$ par x, $\frac{y^2}{b^2}$ par y, $\frac{z^2}{c^2}$ par z, et, par con-

séquent, dx, dy, dz par

$$\frac{a}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx,\quad \frac{b}{2}y^{-\frac{1}{2}}dy,\quad \frac{c}{2}z^{-\frac{1}{2}}dz;$$

nous aurons

$$S=\frac{a^{p+1}b^{q+1}c^{r+1}}{2^3}\int\int\int e^{-(a^2x+b^2y+c^2z)}x^{\frac{p-1}{2}}y^{\frac{q-1}{2}}z^{\frac{r-1}{2}}\,dx\,dy\,dz,$$

et les limites seront déterminées d'après l'inégalité

$$x+y+z\leqq 1.$$

Posons

$$\frac{p+1}{2}=l,\quad \frac{q+1}{2}=m,\quad \frac{r+1}{2}=n$$

et

$$U=\int\int\int e^{-(a^2x+b^2y+c^2z)}x^{l-1}y^{m-1}z^{n-1}\,dx\,dy\,dz.$$

On aura

$$S=\frac{a^{2l}b^{2m}c^{2n}}{2^3}U.$$

2. Cette transformation faite, nous réduirons l'intégrale U par la méthode Dirichlet. Multiplions cette intégrale par l'intégrale définie

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\sin u\cos ku\,du}{u},$$

dans laquelle

$$k=x+y+z.$$

Ce facteur est égal à l'unité pour toutes les valeurs de k comprises entre -1 et $+1$; et il est nul pour toute autre valeur (Duhamel, *Analyse*, t. II, p. 177). Et puisque les variables ne peuvent prendre que des valeurs positives, on aura tous les éléments de l'intégrale, et ces éléments seuls, en prenant 0 et ∞ pour limites de l'intégration relativement à chaque variable. Donc

$$U=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\sin u\,du}{u}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\cos(x+y+z)u.e^{-(a^2x+b^2y+c^2z)}x^{l-1}y^{m-1}z^{n-1}\,dx\,dy\,dz;$$

$\cos(x+y+z)u$ est la partie réelle du développement de l'exponentielle $e^{(x+y+z)u\sqrt{-1}}$. Soit donc

$$V = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(a^2-u\sqrt{-1})x-(b^2-u\sqrt{-1})y-(c^2-u\sqrt{-1})z} x^{l-1}.y^{m-1}.z^{n-1}\,dx\,dy\,dz;$$

l'intégrale U sera la partie réelle de l'intégrale

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin u\,du}{u} V.$$

3. L'intégrale V est le produit de trois intégrales simples. Celle qui se rapporte à x est

$$\int_0^\infty e^{-(a^2-u\sqrt{-1})x} x^{l-1}\,dx.$$

Or, en faisant

$$\alpha_1 = \text{arc tang}\,\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad r = (a^2+b^2)^{\frac{1}{2}},$$

on a (Moigno, *Calcul intégral*, p. 309)

$$\int_0^\infty x^{l-1} e^{-(a+b\sqrt{-1})x}\,dx = \frac{e^{l\alpha_1\sqrt{-1}}.\Gamma(l)}{r^l};$$

on a donc, en posant $\alpha = \text{arc tang}\,\frac{u}{a^2}$,

$$\int_0^\infty x^{l-1} e^{(a^2-u\sqrt{-1})x}\,dx = \frac{e^{-l\alpha\sqrt{-1}}.\Gamma(l)}{(a^4+u^2)^{\frac{1}{2}l}}.$$

On obtiendra de même les deux autres intégrales. Ainsi, en posant

$$\beta = \text{arc tang}\,\frac{u}{b^2},$$

$$\gamma = \text{arc tang}\,\frac{u}{c^2},$$

on aura

$$V = \frac{\Gamma(l)\Gamma(m)\Gamma(n).e^{-(l\alpha+m\beta+n\gamma)\sqrt{-1}}}{(a^4+u^2)^{\frac{1}{2}l}(b^4+u^2)^{\frac{1}{2}m}(c^4+u^2)^{\frac{1}{2}n}}.$$

Pour avoir la valeur de l'intégrale proposée, il faut réduire V à sa partie réelle. On aura donc

$$S = \frac{a^{2l} b^{2m} c^{2n} \Gamma(l) \Gamma(m) \Gamma(n)}{4\pi} \int_0^\infty \frac{\sin u \cos(l\alpha + m\beta + n\gamma)\, du}{u(a^4+u^2)^{\frac{1}{2}l}(b^4+u^2)^{\frac{1}{2}m}(c^4+u^2)^{\frac{1}{2}n}}.$$

4. Si on appliquait la même méthode à l'intégrale triple

$$S' = \int\int\int e^{+(x^2+y^2+z^2)} x^p y^q z^r\, dx\, dy\, dz,$$

les limites étant déterminées comme pour l'intégrale S, on trouverait

$$S' = S.$$

La même méthode s'applique aussi avec succès à toute intégrale multiple de même forme que l'intégrale S ou que l'intégrale S′, quel que soit d'ailleurs le nombre des variables, pourvu que l'inégalité d'après laquelle on doit déterminer les limites soit de même forme que l'inégalité donnée.