NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

JOSEPH SACCHI
ANGELO GENOCCHI

Solution de la question 282

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 13 (1854), p. 316-317

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1854_1_13__316_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 282

(voir t. XII, p. 443);

PAR MM. JOSEPH SACCHI, de Pavie, et ANGELO GENOCCHI.

Soient a_r, b_r les coordonnées rectangles du $r^{ième}$ sommet du polygone de n côtés inscrit dans la parabole représentée par $y^2 = px$; A_r l'aire du triangle ayant ses sommets aux points de coordonnées a_1, b_1; a_r, b_r; a_{r+1}, b_{r+1}; l'aire du polygone sera $\sum_2^{n-1} A_r$. L'aire d'un triangle en fonction des coordonnées de ses sommets donne

$$(1) \qquad 2A_r = (b_r - b_1)(a_{r+1} - a_1) - (b_{r+1} - b_1)(a_r - a_1);$$

et comme les sommets du polygone sont sur la parabole, on aura

$$b_r^2 = pa_r, \quad b_{r+1}^2 = pa_{r+1}.$$

En substituant ces valeurs de a_r, a_{r+1} dans l'équation (1), on a

$$2pA_r = (b_r - b_1)(b_{r+1} - b_1)(b_{r+1} - b_r),$$

et l'aire du polygone sera

$$(2) \qquad \frac{1}{2p}\sum_2^{n-1}(b_r - b_1)(b_{r+1} - b_1)(b_{r+1} - b_r).$$

Si α_1, α_2,..., α_r,..., α_n sont les projections des sommets du polygone sur une perpendiculaire à l'axe de la parabole, l'équation (2) donne

$$\frac{1}{2p}\sum_{2}^{n-1} \alpha_1 \alpha_r . \alpha_1 \alpha_{r+1} . \alpha_r \alpha_{r+1}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Note. M. Gilbert, de Louvain, donne la même démonstration, sauf la notation, et ajoute cette observation : De tous les polygones d'un même nombre de côtés inscrits dans le même arc de parabole, celui-là a l'aire maximum pour lequel $\alpha_1 \alpha_2 = \alpha_2 \alpha_3 = \alpha_3 \alpha_4 = \ldots.$

M. Gérard, de Toulouse, donne aussi une solution qui ne diffère pas de celle de M. Gilbert.