EUZET

Sur la somme des progressions géométriques infinies

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 13 (1854), p. 301-304

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1854_1_13__301_1>

SUR LA SOMME DES PROGRESSIONS GÉOMÉTRIQUES INFINIES;

PAR M. EUZET,

Garde du Génie, à Toulon.

Trouver la somme des termes de la progression infinie par quotient

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\ldots.$$

Soit à partager l'unité en 3 parties égales, on pourra opérer ainsi : Divisez d'abord l'unité en 4 parties, et isolez 3 portions de $\frac{1}{4}$ chacune; divisez le $\frac{1}{4}$ restant en 4 parties, égales par conséquent à $\frac{1}{4^2}$, et placez une de ces parties à côté de chacune des 3 autres; vous aurez

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2},$$
$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2},$$
$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2},$$

il vous restera $\frac{1}{4^2}$ que vous diviserez et distribuerez de la même manière, et ainsi de suite. Cette opération étant continuée à l'infini, l'unité que vous aviez d'abord se trouvera entièrement partagée et formera 3 lots égaux chacun à

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\ldots;$$

par suite, chaque lot, ou la somme des termes de la progression donnée, sera égale à $\frac{1}{3}$.

Il est aisé de voir que, pour toute autre progression dont la raison serait une fraction différente, mais ayant l'unité pour numérateur, il suffira de retrancher 1 du dénominateur pour avoir la somme des termes de la progression correspondante.

Si tous les termes de la progression étaient multipliés par le même nombre, il faudrait évidemment multiplier le résultat ci-dessus par le nombre constant, ce qui ne change rien à la règle établie.

Cette règle étant appliquée à une fraction décimale périodique, on trouve que la valeur de cette fraction est égale à la période divisée par un nombre composé d'autant de 9 que cette période a de chiffres.

Trouver la somme des termes d'une progression infinie par quotient, la raison étant une fraction quelconque proprement dite.

Soit, pour fixer les idées, la progression

$$\frac{3}{5}+\frac{3^2}{5^2}+\frac{3^3}{5^3}+\ldots.$$

Le numérateur de la fraction génératrice étant

$$1+1+1,$$

les $\frac{3}{5}$ de ce numérateur seront composés de 3 parties

$$\frac{3}{5}+\frac{3}{5}+\frac{3}{5}.$$

Les $\frac{5}{5}$, ou le numérateur entier, vaudra 5 de ces parties, ou

$$\frac{3}{5}+\frac{3}{5}+\frac{3}{5}+\frac{3}{5}+\frac{3}{5}.$$

Retranchant et plaçant à part 2 de ces parties, c'est-à-dire

$$\left(\frac{3}{5}+\frac{3}{5}\right),$$

nous aurons un premier reste égal à

$$\frac{3}{5}+\frac{3}{5}+\frac{3}{5}.$$

Les $\frac{3}{5}$ de ce reste étant

$$\frac{3^2}{5^2}+\frac{3^2}{5^2}+\frac{3^2}{5^2},$$

les $\frac{5}{5}$ seront

$$\frac{3^2}{5^2}+\frac{3^2}{5^2}+\frac{3^2}{5^2}+\frac{3^2}{5^2}+\frac{3^2}{5^2}.$$

Plaçant à part, comme ci-dessus, 2 parties ou bien

$$\left(\frac{3^2}{5^2}+\frac{3^2}{5^2}\right),$$

nous aurons un deuxième reste égal à

$$\frac{3^2}{5^2}+\frac{3^2}{5^2}+\frac{3^2}{5^2}.$$

Opérant sur ce reste comme sur le précédent, nous pourrons mettre de côté les deux nouvelles fractions

$$\left(\frac{3^3}{5^3}+\frac{3^3}{5^3}\right),$$

et avoir le troisième reste

$$\frac{3^3}{5^3}+\frac{3^3}{5^3}+\frac{3^3}{5^3};$$

mais comme ceux-ci vont sans cesse en décroissant, il est visible qu'à l'infini le dernier sera nul; dès lors, le numérateur 3 de la fraction génératrice se trouvant entièrement décomposé dans la série

$$\left(\frac{3}{5}+\frac{3}{5}\right)+\left(\frac{3^2}{5^2}+\frac{3^2}{5^2}\right)+\left(\frac{3^3}{5^3}+\frac{3^3}{5^3}\right)+\ldots,$$

série évidemment égale à 2 fois

$$\left(\frac{3}{5}+\frac{3^2}{5^2}+\frac{3^3}{5^3}+\ldots\right),$$

il en résulte que la somme des termes de cette dernière progression, identique avec la proposée, est égale à $\frac{3}{2}$.

Il est aisé de voir que la somme des termes de toute autre progression semblable est égale au numérateur de la fraction génératrice divisé par la différence des deux termes de cette fraction.