NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

P. TARDY

Solution de la question 262

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 13 (1854), p. 26-27

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1854_1_13__26_0>

SOLUTION DE LA QUESTION 262

(voir t. XI, p. 401) ;

PAR M. P. TARDY.

L'équation

$$(-p)^n = -\frac{n}{1}\,\mathcal{C}_{p,n} + \frac{n(n-1)}{1.2}\,\mathcal{C}_{2p,n} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\,\mathcal{C}_{3p,n} + \ldots \pm \mathcal{C}_{np,n},$$

où n est un nombre entier positif, p une quantité quelconque, et

$$\mathcal{C}_{p,n} = \frac{p(p-1)\ldots(p-n+1)}{1.2\ldots n},$$

donnée par M. Catalan, n'est qu'un cas très-particulier de la formule générale du calcul des différences finies

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \Delta^n f(x) &= f(x+n) - \frac{n}{1} f(x+n-1) \\ &\quad + \frac{n(n-1)}{1.2} f(x+n-2) - \ldots + (-1)^n f(x). \end{aligned}\right.$$

Il suffit de poser

$$f(x) = (-1)^n \frac{px(px-1)(px-2)\ldots(px-n+1)}{1.2.3\ldots n};$$

en effet, il viendra

$$\Delta^n f(x) = (-1)^n \frac{n(n-1)\ldots 2.1.p^n}{1.2\ldots n} = (-p)^n,$$

et

$$f(x+r) = (-1)^n \frac{(x+r)p[(x+r)p-1]\ldots[(x+r)p-n+1]}{1.2.3\ldots n};$$

en substituant dans l'équation (1), et en intervertissant l'ordre des termes dans le second membre, nous aurons

$$(-p)^n = \frac{px(px-1)\ldots(px-n+1)}{1.2.3\ldots n}$$

$$-\frac{n}{1}\,\frac{(x+1)p[(x+1)p-1]\ldots[(x+1)p-n+1]}{1.2\ldots n}$$

$$+\frac{n(n-1)}{1.2}\cdot\frac{(x+2)p[(x+2)p-1]\ldots[(x+2)p-n+1]}{1.2.3\ldots n}-\ldots$$

$$+(-1)^n\frac{(x+n)p[(x+n)p-1]\ldots[(x+n)p-n+1]}{1.2.3\ldots n},$$

laquelle, pour $x=0$, devient la formule de M. Catalan.