

P. TARDY

Solution de la question 141

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 13
(1854), p. 23-25

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1854_1_13__23_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1854, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DE LA QUESTION 141

(voir t. VI, p. 134);

PAR M. P. TARDY.

•

Soient $A_r, A_{r+1}, \dots, A_{r+2}$ trois termes consécutifs d'une série récurrente. Si l'on forme la série qui a pour terme général $A_r A_{r+2} - A_{r+1}^2$, elle est aussi récurrente.

Fourier a énoncé ce théorème dans son *Analyse des*

équations déterminées, page 72. Son objet était de trouver successivement toutes les racines d'une équation par l'emploi des séries récurrentes, en donnant ainsi une grande extension à la méthode découverte par D. Bernoulli pour obtenir la plus grande racine réelle.

Il paraît que quelque erreur s'est glissée dans ce qu'avance à ce propos le célèbre géomètre; mais nous nous bornerons, pour le moment, à démontrer la proposition spéciale rappelée dans ces *Annales*.

Il est aisé de voir que toute série dont le terme général est de la forme

$$\frac{D_1}{a_1^{r+1}} + \frac{D_2}{a_2^{r+1}} + \dots + \frac{D_n}{a_n^{r+1}},$$

D_1, D_2, \dots, D_n désignant des constantes arbitraires, est une série récurrente où l'on a fait la variable pour laquelle la série est ordonnée = 1. Pour avoir la fraction génératrice $\frac{F(x)}{f(x)}$, il suffit de poser

$$f(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n),$$
$$F(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_{n-1} x^{n-1},$$

et de déterminer les n quantités $b_0, b_1, b_2, \dots, b_{n-1}$ par les n équations

$$b_0 + b_1 a_1 + b_2 a_1^2 + \dots + b_{n-1} a_1^{n-1} = -D_1 (a_1 - a_2)(a_1 - a_3) \dots (a_1 - a_n),$$
$$b_0 + b_1 a_2 + b_2 a_2^2 + \dots + b_{n-1} a_2^{n-1} = -D_2 (a_2 - a_1)(a_2 - a_3) \dots (a_2 - a_n),$$

.....

$$b_0 + b_1 a_n + b_2 a_n^2 + \dots + b_{n-1} a_n^{n-1} = -D_n (a_n - a_1)(a_n - a_2) \dots (a_n - a_{n-1}).$$

En effet, nous savons que le terme général de la série récurrente qui provient de la fraction $\frac{F(x)}{f(x)}$ est

$$-x^r \sum_{p=1}^{p=n} \frac{F(a_p)}{f'(a_p) a_p^{r+1}}.$$

Maintenant, supposons que A_r soit le terme général d'une série récurrente, et que $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ soient les racines de l'équation qu'on obtient en égalant à zéro le dénominateur de sa fraction génératrice; on aura

$$A_r = \frac{\epsilon_1}{\lambda_1^{r+1}} + \frac{\epsilon_2}{\lambda_2^{r+1}} + \dots + \frac{\epsilon_n}{\lambda_n^{r+1}}.$$

En changeant r en $r+k$ et en $r+h'$, et en multipliant, il viendra

$$A_{r+k} \cdot A_{r+h'} = \sum_{p=n}^{p=1} \sum_{q=n}^{q=1} \frac{\epsilon_p \epsilon_q}{\lambda_p^k \lambda_q^{h'}} \cdot \frac{1}{(\lambda_p \lambda_q)^{r+1}}.$$

Et si l'on prend $h+h'=k+k'$, on aura, en retranchant, un résultat de la forme

$$\begin{aligned} L = A_{r+k} \cdot A_{r+h'} - A_{r+h} \cdot A_{r+k'} &= B_{1,2} \frac{1}{(\lambda_1 \lambda_2)^{r+1}} + B_{1,3} \frac{1}{(\lambda_1 \lambda_3)^{r+1}} + \dots \\ &+ B_{n-1,n} \frac{1}{(\lambda_{n-1} \lambda_n)^{r+1}}; \end{aligned}$$

et l'on voit que L est le terme général d'une série récurrente qui naît de la fraction

$$\frac{\varphi(x)}{(x - \lambda_1 \lambda_2)(x - \lambda_1 \lambda_3) \dots (x - \lambda_{n-1} \lambda_n)},$$

$\varphi(x)$ étant un polynôme d'un degré $= \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} - 1$.

Prenant $k=0, h'=2, h=h'=1$, on aura le théorème particulier dont il était question.