JOSEPH LIOUVILLE

Méthode métamorphique par rayons vecteurs réciproques

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 13 (1854), p. 227-245

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1854_1_13__227_1>

MÉTHODE MÉTAMORPHIQUE PAR RAYONS VECTEURS RÉCIPROQUES;

D'APRÈS M. JOSEPH LIOUVILLE.

(Journal de Mathématiques, tome XII, page 365; 1847.

---

1. *Problème.* — Entre les six variables x, y, z, x', y', z', on a les huit équations

$$\begin{aligned}
\xi &= f(x, y, z), & \xi' &= f(x', y', z');\\
\eta &= \mathrm{F}(x, y, z), & \eta' &= \mathrm{F}(x', y', z');\\
\zeta &= \varphi(x, y, z), & \zeta' &= \varphi(x', y', z');\\
p &= \psi(x, y, z), & p' &= \psi(x', y', z');
\end{aligned}$$

quelles formes faut-il donner aux quatre fonctions f, F, φ, ψ pour qu'on ait l'identité

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} &p^2 p'^2 [(\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2 + (\zeta - \zeta')^2]\\ &= (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2. \end{aligned}\right.$$

Solution. Soient x_0, y_0, z_0 certaines valeurs particulières de x', y', z'; l'identité devient

$$p^2 p_0^2 [(\xi - \xi_0)^2 + (\eta - \eta_0)^2 + (\zeta - \zeta_0)^2]$$
$$= (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2.$$

Les indices o indiquent ce que deviennent les fonctions par ces substitutions; faisons

$$\begin{array}{lll} \xi - \xi_0 = t, & \eta - \eta_0 = u, & \zeta - \zeta_0 = v, \\ x - x_0 = x_1, & y - y_0 = y_1, & z - z_0 = z_1, \\ \xi' - \xi_0 = t', & \eta' - \eta_0 = u', & \zeta' - \zeta_0 = v', \\ x' - x_0 = x'_1, & y' - y_0 = y'_1, & z' - z_0 = z'_1; \end{array}$$

nous aurons

$$p^2 p'^2 [(t - t')^2 + (u - u')^2 + (v - v')^2]$$
$$= (x_1 - x'_1)^2 + (y_1 - y'_1)^2 + (z_1 - z'_1)^2,$$
$$p^2 p_0^2 (t^2 + u^2 + v^2) = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2,$$
$$p'^2 p_0^2 (t'^2 + u'^2 + v'^2) = x'^2_1 + y'^2_1 + z'^2_1.$$

Éliminant p et p' de ces équations et posant

$$t^2 + u^2 + v^2 = \rho^2, \quad x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = r^2,$$
$$t'^2 + u'^2 + v'^2 = \rho'^2, \quad x'^2_1 + y'^2_1 + z_1^2 = r'^2,$$

on obtient

$$\frac{1}{\rho^2} - \frac{t'}{\rho'^2}\frac{t^2}{\rho^2} - 2\frac{u'}{\rho'^2}\frac{u}{\rho^2} - 2\frac{v'}{\rho'^2}\frac{v}{\rho^2} = -\frac{1}{\rho'^2}$$
$$+ p_0^4 \left[\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r'^2} - \frac{2}{r^2 r'^2}(x_1 x'_1 + y_1 y'_1 + z_1 z'_1)\right].$$

Donnons maintenant successivement à x'_1, y'_1, z'_1 quatre valeurs *déterminées*; conséquemment, à chacun de ces systèmes de valeurs correspondent des valeurs *déterminées* de x', y', z'; ξ', η', ζ'; t', u', v'; ρ', r'.

On a donc quatre équations du premier degré entre les quatre inconnues

$$\frac{1}{\rho^2}, \quad \frac{t}{\rho^2}, \quad \frac{u}{\rho^2}, \quad \frac{v}{\rho^2};$$

on en déduit, par les formules de Cramer,

$$\frac{t}{\rho^2} = A + \frac{P}{r^2}, \quad \frac{u}{\rho^2} = B + \frac{Q}{r^2}, \quad \frac{v}{\rho^2} = C + \frac{R}{r^2}, \quad \frac{1}{\rho^2} = D + \frac{S}{r^2},$$

A, B, C, D étant des quantités connues fonctions des quatre valeurs particulières de x'_1, y'_1, z'_1 et P, Q, R, S des fonctions entières et *linéaires* de x_1, y_1, z_1.

Élevant les quatre premières de ces équations au carré et les ajoutant, on a

$$A^2 + B^2 + C^2 + \frac{2(AP + BQ + CR)}{r^2} + \frac{P^2 + Q^2 + R^2}{r^4} = \frac{1}{\rho^2} = D + \frac{S}{r^2}.$$

Chassant le dénominateur, et considérant que P, Q, R, S, r sont des fonctions entières de x_1, y_1, z_1, on voit que $P^2 + Q^2 + R^2$ doit être divisible par r^2; mais le dividende et le diviseur étant de même degré, le quotient ne renferme plus de variables : représentant ce quotient par la constante m, on a

$$P^2 + Q^2 + R^2 = mr^2 = m(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2).$$

Faisons

$$\begin{aligned} P &= m(ax_1 + by_1 + cz_1), \\ Q &= m(a'x_1 + b'y_1 + c'z_1), \\ R &= m(a''x_1 + b''y_1 + c''z_1). \end{aligned}$$

Nous ne mettons pas de constantes, parce que, en substituant ces valeurs de P, Q, R dans la dernière équation, la somme des carrés de ces constantes devrait être nulle; cette substitution donne les relations

$$a^2+a'^2+a''^2=1,\quad ab+a'b'+a''b''=0,$$
$$b^2+b'^2+b''^2=1,\quad bc+b'c'+b''c''=0,$$
$$c^2+c'^2+c''^2=1,\quad ca+c'a'+c''b''=0,$$

équations qu'on rencontre dans le passage de coordonnées rectangulaires à d'autres coordonnées rectangulaires; et ces relations, comme on sait, en entraînent encore six autres.

Remplaçant x_1, y_1, z_1 par leurs valeurs $x-x_0$, $y-y_0$, $z-z_0$, on a

$$\begin{aligned}P&=m[a\,(x-x_0)+b\,(y-y_0)+c\,(z-z_0)],\\ Q&=m[a'(x-x_0)+b'(y-y_0)+c'(z-z_0)],\\ R&=m[a''(x-x_0)+b''(y-y_0)+c''(z-z_0)].\end{aligned}$$

Faisons

$$A+\frac{P}{r^2}=T,\quad B+\frac{Q}{r^2}=U,\quad C+\frac{R}{r^2}=V,$$

et remplaçons t, u, v par $\xi-\xi_0$, $\eta-\eta_0$, $\zeta-\zeta_0$; nous obtiendrons

$$\xi-\xi_0=\frac{T}{T^2+U^2+V^2},\quad \eta-\eta_0=\frac{U}{T^2+U^2+V^2},$$
$$\zeta-\zeta_0=\frac{V}{T^2+U^2+V^2}.$$

Il reste à trouver p; or,

$$\begin{aligned}&(\xi-\xi')^2+(\eta-\eta')^2+(\zeta-\zeta')^2\\ &=\frac{(T-T')^2+(U-U')^2+(V-V')^2}{(T^2+U^2+V^2)(T'^2+U'^2+V'^2)},\\ &(T-T')^2+(U-U')^2+(V-V')^2\\ &=\frac{m^2[(P-P')^2+(Q-Q')^2+(R-R')^2]}{(P+Q^2+R^2)(P'^2+Q'^2+R'^2)};\end{aligned}$$

les relations entre les a, b, c donnent

$$(P - P')^2 + (Q - Q')^2 + (R - R')^2$$
$$= (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2,$$

donc

$$(\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2 + (\zeta - \zeta')^2$$
$$= \frac{m^2[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]}{(P^2+Q^2+R^2)(P'^2+Q'^2+R'^2)(T^2+U^2+V^2)(T'^2+U'^2+V'^2)};$$

en prenant donc

$$p^2 = \frac{(P^2+Q^2+R^2)(T^2+U^2+V^2)}{m},$$

on obtient

$$p^2 p'^2[(\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2 + (\zeta - \zeta')^2]$$
$$= (x - x_1)^2 + (y - y')^2 + (z - z_1)^2.$$

Ainsi, on a satisfait à l'identité, et le problème est résolu; mais on peut encore exprimer p, ξ, η, ζ en fonction *explicite* de x, y, z.

Commençons par p: on a

$$(P^2 + Q^2 + R^2)(T^2 + U^2 + V^2)$$
$$= (A^2 + B^2 + C^2)\left[P^2 + Q^2 + R^2 + \frac{2m(AP + BQ + CR) + m^2}{A^2 + B^2 + C^2}\right],$$

$$P^2 + Q^2 + R^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2,$$
$$(Aa + Ba' + Ca'')^2 + (Ab + Bb' + Cb'')^2$$
$$+ (Ac + Bc' + Cc'')^2 = A^2 + B^2 + C^2,$$

$$2m[AP + BQ + CR]$$
$$= 2m\left[\begin{array}{r}(x-x_0)(Aa+Ba'+Ca'')+(y-y_0)(Ab+Bb'+Cb'')\\ +(z-z^0)(Ac+Bc'+Cc'')\end{array}\right]$$

Posant

$$x_1 = x_0 - m\frac{(\mathrm{A}a + \mathrm{B}a' + \mathrm{C}a'')}{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 + \mathrm{C}^2},$$

$$y_1 = y_0 - m\frac{(\mathrm{A}b + \mathrm{B}b' + \mathrm{C}b'')}{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 + \mathrm{C}^2},$$

$$z_1 = z_0 - m\frac{(\mathrm{A}c + \mathrm{B}c' + \mathrm{O}c'')}{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 + \mathrm{C}^2},$$

on obtient

$$mp^2 = (\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 + \mathrm{C}^2)\left[(x - x_1)^2 + (y + y_1)^2 + (z - z_1)^2\right];$$

ainsi p est exprimé explicitement en fonction quadratique de x, y, z, et l'on voit que p est proportionnel à la distance du point variable (x, y, z) au point fixe (x_1, y_1, z_1).

Passant aux fonctions ξ, η, ζ, on a, en remplaçant T, U, V par leurs valeurs,

$$\xi - \xi_0 = \frac{\mathrm{A}(\mathrm{P}^2 + \mathrm{Q}^2 + \mathrm{R}^2) + m\mathrm{P}}{mp^2}$$

$$= \frac{\mathrm{A}(\mathrm{P}^2 + \mathrm{Q}^2 + \mathrm{R}^2) + m\mathrm{P}}{(\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 + \mathrm{C}^2)(\mathrm{P}^2 + \mathrm{Q}^2 + \mathrm{R}^2) + 2m(\mathrm{AP} + \mathrm{BQ} + \mathrm{CR}) + m^2}$$

$$= \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 + \mathrm{C}^2} + \frac{\mathrm{X}}{p^2},$$

où X est une fonction linéaire en x, y, z.

Posons

$$\xi^0 = \xi_0 + \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 + \mathrm{C}^2};$$

on a

$$\xi - \xi^0 = \frac{\mathrm{X}}{p^2};$$

de même

$$\eta - \eta^0 = \frac{\mathrm{Y}}{p^2}, \quad \zeta - \zeta^0 = \frac{\mathrm{Z}}{p^2}.$$

Ainsi, ξ, η, ζ sont données explicitement en fonction linéaire de x, y, z divisée par une fonction quadratique. On peut parvenir aux trois fonctions X, Y, Z d'une manière simple. Si l'on suppose que l'une des variables x, y, z devienne infinie, alors $\frac{X}{p^2}$ s'annule, et, dans ce cas,

$$\xi = \xi^0, \quad \eta = \eta^0, \quad \zeta = \zeta^0, \quad \text{et} \quad \frac{p}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{A^2 + B^2 + C^2}{m};$$

l'identité devient, dans cette même hypothèse,

$$(\xi' - \xi^0)^2 + (\eta' - \eta^0)^2 + (\zeta' - \zeta^0)^2 = \frac{m}{p'^2 (A^2 + B^2 + C^2)},$$

ou, en ôtant les accents,

$$(\xi - \xi^0)^2 + (\eta - \eta^0)^2 + (\zeta - \zeta^0)^2 = \frac{m}{p^2 (A^2 + B^2 + C^2)}$$
$$= \frac{X^2 + Y^2 + Z^2}{p^4}.$$

donc

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = \frac{mp^2}{A^2 + B^2 + C^2}$$
$$= (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2.$$

Opérant sur cette équation, comme ci-dessus sur l'équation analogue

$$P^2 + Q^2 + R^2 = m(x^2 + y^2 + z^2),$$

on trouve

$$\begin{aligned} X &= \alpha\ (x - x_1) + \beta\ (y - y_1) + \gamma\ (z - z_1), \\ Y &= \alpha'\ (x - x_1) + \beta'\ (y - y_1) + \gamma'\ (z - z_1), \\ Z &= \alpha''(x - x_1) + \beta''(y - y_1) + \gamma''(z - z_1). \end{aligned}$$

Entre les α, β, γ existent les mêmes relations que ci-dessus entre les a, b, c; de plus,

$$\xi - \xi^0 = \frac{nX}{X^2 + Y^2 + Z^2}, \qquad \eta - \eta^0 = \frac{nY}{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

$$\zeta - \zeta^0 = \frac{nZ}{X^2 + Y^2 + Z^2}, \qquad p^2 = \frac{X^2 + Y^2 + Z^2}{n},$$

où

$$n = \frac{m}{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Cette belle manière de trouver les quatre formes f, F, φ, ψ subsiste encore lorsqu'au lieu de trois variables, qui suffisent aux applications géométriques, on en a un nombre quelconque.

De même qu'on a calculé ξ, η, ζ en fonction de x, y, z, on peut, inversement, calculer x, y, z en fonction de ξ, η, ζ. Il suffit de faire

$$p = \frac{1}{q}, \quad p' = \frac{1}{q'},$$

et l'identité (1) devient

$$[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]\, q^2 q'^2$$
$$= (\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2 + (\zeta - \zeta')^2;$$

ainsi la forme de l'identité n'est pas changée, et en suivant la même marche que ci-dessus, on en déduira x, y, z en fonction de ξ, η, ζ.

Interprétation géométrique; rayons vecteurs réciproques.

2. Considérons x, y, z comme les coordonnées rectangulaires d'un point m; et ξ, η, ζ comme les coordonnées rectangulaires d'un point μ, l'origine et les axes étant les mêmes pour les deux points. Transportons l'origine au point qui a pour cordonnées x_1, y_1, z_1, nous aurons

$$X = \alpha x + \beta y + \gamma z, \quad Y = \alpha' x + \beta' y + \gamma' z,$$
$$Z = \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z \text{ (\textit{voir} ci-dessus)};$$

à raison des relations qui subsistent entre les α, β, γ, on peut prendre ces quantités pour les cosinus des angles que font de nouveaux axes rectangulaires avec les anciens, et X, Y, Z sont les coordonnées du point m relativement à ces nouveaux axes. Transportons ces axes parallèlement à eux-mêmes au point O dont les coordonnées sont ζ^0, η^0, ξ^0, nous aurons

$$\xi = \frac{nx}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \eta = \frac{ny}{x^2 - y^2 + z^2}, \quad \zeta = \frac{ny}{x^2 + y^2 + z^2},$$

ξ, η, ζ, x, y, z étant les coordonnées de μ et de m, dans cette dernière position des axes; on a aussi

$$x = \frac{n\zeta}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}, \quad y = \frac{n\eta}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}, \quad z = \frac{n\zeta}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2},$$
$$(x^2 + y^2 + z^2)(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) = n^2,$$
$$[(\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2 + (\zeta - \zeta')^2] \frac{[x^2 + y^2 + z^2][x'^2 + y'^2 + z'^2]}{n^2}$$
$$= (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2;$$

prenant

$$p^2 = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{n^2},$$

l'identité (1) est satisfaite.

De là on conclut que : 1° les trois points O, m, μ sont en ligne droite; 2° $Om.\ O\mu = n^2$.

Les points n, μ sont dits *points réciproques*, et les rayons Om, $O\mu$, rayons *vecteurs* réciproques. Ainsi, la géométrie suffit pour résoudre le problème (1), pourvu que le nombre de variables ne dépasse pas trois; mais, comme nous avons dit, la belle analyse de M. Liouville s'étend à un nombre quelconque de variables : l'identité (1) peut s'écrire

$$\Delta pp' = \mathrm{D}$$

où

$$\Delta^2 = (\zeta - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2 + (\zeta - \zeta')^2,$$
$$\mathrm{D}^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2.$$

Δ est la distance de deux points M, M', D la distance des deux points réciproques μ, μ'; p et p' sont les rayons vecteurs $\mathrm{O}\mu$, $\mathrm{O}\mu'$.

Étant donnée l'équation polaire d'une surface ou d'une ligne, on trouve la surface ou la ligne réciproque en remplaçant le rayon vecteur ρ par $\frac{\mathrm{K}^2}{\rho}$, où K est une constante donnée, et l'équation

$$\Delta pp' = \mathrm{D}$$

transporte les relations métriques de la première surface ou ligne à la surface ou à la ligne réciproque.

Prenons un triangle infinitésimal M M' M''; dans le triangle infinitésimal réciproque $\mu\ \mu'\ \mu''$, les trois rayons vecteurs $\mathrm{O}\mu$, $\mathrm{O}\mu'$, $\mathrm{O}\mu''$ sont différentiellement égaux; on a donc

$$\frac{\mu\mu'}{\mathrm{MM}'} = \frac{\mu\mu''}{\mathrm{MM}''} = \frac{\mu'\mu''}{\mathrm{M}'\mathrm{M}''} = p^2.$$

Ainsi, les deux triangles sont semblables, et, par conséquent, équiangles. De sorte que, si deux lignes se coupent sous un certain angle, les lignes réciproques se coupent sous le même angle.

3. (*) Soient une surface algébrique S de degré n; M un

(*) Ce qui suit n'est pas dans le Mémoire cité point de cette surface ; O l'origine des coordonnées que nous supposons rectangulaires. Prenant sur le rayon vecteur OM, dans le sens de OM, une longueur $O\mu$ telle, que l'on ait $OM.O\mu = K^2 =$ constante, le lieu du point μ est la surface Σ, réciproque de S ; Σ est, généralement parlant, de degré $2n$, tandis que S, réciproque de Σ, n'est que de degré n. Lorsque le pôle O est sur la surface S, le point correspondant dans Σ est à l'infini, les termes de degré $2n$ disparaissent dans Σ qui n'est plus que du degré $2n - 1$; autant une surface S a de nappes infinies, autant la réciproque a de nappes qui passent par le pôle, et autant une ligne a de branches infinies, autant la réciproque a de branches qui passent par le pôle ; à chaque valeur de K^2 correspond une surface Σ. Toutes ces surfaces sont évidemment *homothètes*, et, par conséquent, les plans tangents à ces surfaces menés par des points situés sur le même rayon, sont parallèles. Pour $K^2 = 0$, la surface Σ se transporte à l'infini, et pour $K^2 = \infty$, la surface Σ se réduit au pôle O. En prenant K^2 négativement, les surfaces Σ sont les symétriques relativement au pôle de celles qui répondent à K^2 pris positivement.

4. Prenons pour S une sphère et pour K^2 la *puissance* du pôle O relativement à cette sphère ; il est évident que le point μ réciproque à M est sur la même sphère S, donc la surface Σ se confond avec S : les plans tangents en M et μ sont également inclinés sur le rayon vecteur $O\mu M$, mais en *sens inverse ;* ils sont *antiparallèles* relativement à ce rayon. Faisant varier K^2, les diverses surfaces Σ étant *homothètes* sont toujours des sphères. Si le pôle O est sur la sphère S, le degré de Σ est diminué d'une unité et devient un plan perpendiculaire au rayon de la sphère S qui passe par O.

Soit K^2 égal à la puissance du point O relativement à la sphère S ; prenons sur cette sphère S trois points

M, M', M'', et leurs réciproques μ, μ', μ'' : les quatre points M, M', μ, μ' sont sur un même petit cercle ; les quatre points M, M'', μ, μ'' sont sur un autre petit cercle ; l'angle M' M M'', formé par les arcs MM', MM'', est évidemment égal à l'angle $\mu' \mu \mu''$; et à cause des propriétés homothétiques, ceci a également lieu pour des valeurs quelconques de K.

5. Deux sphères S, s se coupant suivant un petit cercle, les sphères réciproques Σ, σ se coupent aussi suivant un petit cercle, réciproque du premier ; donc la ligne réciproque d'un cercle est un cercle, et l'angle suivant lequel se coupent les sphères Σ, σ est égal à l'angle suivant lequel se coupent les sphères S, s : c'est une conséquence de l'*antiparallélisme* (4). Les cercles réciproques forment le même angle que les cercles directs ; de là découlent les propriétés de la projection stéréographique.

6. Soient M un point commun à deux surfaces quelconques S, s, μ le point correspondant dans les surfaces réciproques Σ, σ ; au point μ les deux surfaces Σ, σ se coupent suivant le même angle que les surfaces S, s au point M : cela devient évident en plaçant une sphère touchant la surface S, et une autre sphère touchant la surface s au même point M. De même, si S, s représentent des lignes quelconques.

7. Il suit du paragraphe précédent, qu'un système de surfaces étant coupé par une surface trajectrice, partout sous le même angle, la réciproque de la surface trajectrice sera trajectrice du système réciproque ; lorsque l'angle est nul, la surface trajectrice devient une enveloppe ; de même pour des lignes. De là découlent de nombreuses, curieuses et importantes conséquences sur les lignes loxodromiques, de courbure, etc. C'est ainsi que l'on transforme un polygone rectiligne plan en un poly-

gone circulaire plan, où la somme des angles ne dépend que du nombre des côtés (théorème de M. Miquel).

8. Supposons dans un même plan une droite et un cercle, le centre du cercle étant pris pour pôle et son rayon pour la constante K, la réciproque de la droite est un second cercle, *image* de la droite dans le premier cercle considéré comme ligne réfléchissante; et la droite est aussi l'image du second cercle par rapport à cette ligne miroitante. C'est cette propriété optique qui a porté un géomètre éminent, M. William Thomson (*), à désigner ce système métamorphique sous le nom de principe *des images* (*Journal de Mathématiques,* tome X, p. 364); depuis, M. Liouville a généralisé ce principe et l'a désigné sous le nom de *rayons vecteurs réciproques*, qui caractérise la condition géométrique.

9. M. William Roberts a fait voir que, pour les courbes planes, la similitude des triangles infinitésimaux subsiste encore pour des transformations autres que celles qui sont fondées sur le principe des images (*Journal de Mathématiques,* tome X, page 209; 1848). Étant donnée l'équation polaire d'une courbe plane en r et ω; remplaçant r par R^n et ω par $n\omega$, où r est un nombre quelconque positif ou négatif, réel ou imaginaire, on a

$$r\frac{d\omega}{dr} = \frac{R\,d\Omega}{dR}.$$

Or, $\frac{rd\omega}{dr}$ est la tangente de l'angle que forme la tangente à la courbe avec le rayon vecteur; donc, etc.

A l'aide de ce principe si simple, l'ingénieux professeur démontre avec une extrême facilité une foule de pro-

(*) Depuis 1846, rédacteur de l'excellent recueil *Cambridge and Dublin Mathematical Journal.* Le format in-8 ne semble pas commode pour des ouvrages destinés à renfermer de longues formules, des calculs étendus.

priétés. Citons-en deux. L'auteur nomme *tangente hyperbolique* à une conique, une hyperbole *équilatère*, tangente à la conique en un point et concentrique à la conique. Cette définition admise, on a ce théorème :

THÉORÈME. *Étant données deux ellipses homofocales; si, par un point de l'ellipse extérieure, on mène deux tangentes hyperboliques à l'ellipse intérieure, ces tangentes sont également inclinées sur l'ellipse extérieure.* Même théorème pour des tangentes rectilignes.

THÉORÈME. *Le lieu du sommet d'un point dont le produit des distances aux n sommets d'un polygone régulier est constant, est représenté, comme on sait, par l'équation polaire*

$$r^{2n} - 2a^n r^n \cos n\omega + a^{2n} = b^{2n} \ (^*).$$

a est la distance du cercle circonscrit et b un paramètre variable; les trajectoires orthogonales sont données par l'équation

$$r^n \cos n(\omega - \theta) = a^n \cos n\theta,$$

où θ est un paramètre variable. C'est le lieu d'un point tel que le produit de ses distances aux n sommets d'un polygone régulier est égal à la $n^{ième}$ puissance de la distance de ce point au centre du polygone régulier. Voir aussi plusieurs beaux résultats du même géomètre (*Nouvelles Annales*, tome IX, pages 11, 142, 182, 309, 321, et tome XI, page 182.)

9. Nous joignons ici, comme exercice de calcul infinitésimal, quelques résultats donnés dans le Mémoire de M. Thomson, et qu'on rencontre fréquemment dans la théorie attractionnelle et dans celle des fluides impondérés.

(*) *Nouvelles Annales*, VANNSON, t. VI, p. 91.

1°. On a

$$\frac{1}{p} = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}; \quad \frac{d\left(\frac{1}{p}\right)}{dx} = \frac{-dp}{p^2\,dx};$$

$$\frac{d^2\frac{1}{p}}{dx^2} = -\frac{1}{p^2}\frac{d^2p}{dx^2} + \frac{2\left(\frac{dp}{dx}\right)}{p^3};$$

$$\frac{dp}{dx} = \frac{x}{p}, \quad \frac{d^2p}{dx^2} = \frac{1}{p} - \frac{x^2}{p^3};$$

$$\frac{d^2\left(\frac{1}{p}\right)}{dx^2} = -\frac{1}{p^3} + \frac{3x^2}{p^5};$$

de même

$$\frac{d^2\left(\frac{1}{p}\right)}{dy^2} = -\frac{1}{p^3} + \frac{3y^2}{p^5}, \qquad \frac{d^2\left(\frac{1}{p}\right)}{dz^2} = -\frac{1}{p^3} + \frac{3z^2}{p^5};$$

ainsi

$$\frac{d^2\left(\frac{1}{p}\right)}{dx^2} + \frac{d^2\left(\frac{1}{p}\right)}{dy^2} + \frac{d^2\left(\frac{1}{p}\right)}{dz^2} = 0.$$

2°. On a

$$x = \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}, \quad y = \frac{\eta}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}, \quad z = \frac{\zeta}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}.$$

$$\frac{dx}{d\xi} = y^2 + z^2 - x^2, \quad \frac{dy}{d\xi} = -2xy, \quad \frac{dz}{d\xi} = -2xz,$$

$$\frac{dx}{d\eta} = -2xy, \quad \frac{dy}{d\eta} = x^2 + z^2 - y^2, \quad \frac{dz}{d\eta} = -2yz,$$

$$\frac{dx}{d\zeta} = -2xz, \quad \frac{dy}{d\zeta} = -2yz, \quad \frac{dz}{d\zeta} = x^2 + y^2 - z^2.$$

Supposons $U = (\xi, \eta, \zeta)$; les crochets désignant une fonction des variables qu'ils renferment, on a donc aussi

$U = (x, y, z)$, donc

$$\frac{dU}{d\xi} = \frac{dU}{dx}(y^2 + z^2 - x^2) - 2\frac{dU}{dy}xy - 2\frac{dU}{dz}xz,$$

$$\frac{dU}{d\eta} = -2\frac{dU}{dx}xy + \frac{dU}{dy}(x^2 + z^2 - y^2) - 2\frac{dU}{dz}yz,$$

$$\frac{dU}{d\zeta} = -2\frac{dU}{dx}xz - 2\frac{dU}{dy}yz + \frac{dU}{dz}(x^2 + y^2 - z^2);$$

donc

$$\left(\frac{dU}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dU}{d\eta}\right)^2 + \left(\frac{dU}{d\zeta}\right)^2$$
$$= p^4\left[\left(\frac{dU}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dU}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dU}{dz}\right)^2\right].$$

(*Journal de Mathématiques*, tome XII, page 290.)

Les coefficients différentiels expriment ici des différences partielles.

3°. Cherchons à transformer $\frac{d^2U}{d\xi^2} + \frac{d^2U}{d\eta^2} + \frac{d^2U}{d\zeta^2}$ en différences partielles relatives aux variables x, y, z. Différentiant la première des trois équations ci-dessus par rapport à ξ, et n'ayant égard qu'aux U, on a

$$\frac{d^2U}{dx^2}[(y^2 + z^2 - x^2)^2 + 4y^2x^2 + 4z^2x^2] = p^4\frac{d^2U}{dx^2};$$

donc, pour les trois équations,

$$p^4\left[\frac{d^2U}{dx^2} + \frac{d^2U}{dy^2} + \frac{d^2U}{dz^2}\right].$$

Ayons maintenant égard aux x, y, z.

Ne prenant que ce qui multiplie $\frac{dU}{dx}$, on a

$$\frac{d(y^2 + z^2 - x^2)}{d\xi} - 2\frac{d.xy}{d\eta} - 2\frac{d.xz}{d\zeta}:$$

effectuant, et considérant que

$$\frac{dx}{d\zeta} = \frac{dz}{d\xi}, \quad \frac{dy}{d\xi} = \frac{dx}{d\eta},$$

on trouve

$$-\,2\,p^2 x\,\frac{dU}{dx} = -\,2\,p^3\,\frac{dp}{dx}\,\frac{dU}{dx},$$

car,

$$\frac{dp}{dx} = \frac{x}{p};$$

et de même, on a, pour $\dfrac{dU}{dy}$ et $\dfrac{dU}{dz}$,

$$-\,2\,p^3\,\frac{dp}{dy}\,\frac{dU}{dy}, \quad -\,2\,p^3\,\frac{dp}{dz}\,\frac{dU}{dz}.$$

Les coefficients des autres différences partielles telles que $\dfrac{d^2U}{dx\,dy}$, $\dfrac{d^2U}{dx\,dz}$, etc., s'annulent, et l'on a pour transformée

$$p^4\left[\frac{d^2U}{dx^2} + \frac{d^2U}{dy^2} + \frac{d^2U}{dz^2}\right]$$
$$-\,2\,p^3\left[\frac{dp}{dx}\,\frac{dU}{dx} + \frac{dp}{dy}\,\frac{dU}{dy} + \frac{dp}{dz}\,\frac{dU}{dz}\right].$$

Faisant

$$p = \frac{1}{q},$$

on obtient

$$\frac{d^2.qU}{dx^2} + \frac{d^2.qU}{dy^2} + \frac{d^2.qU}{dz^2} = 2\left(\frac{dq}{dx}\,\frac{dU}{dx} + \frac{dq}{dy}\,\frac{dU}{dy} + \frac{dq}{dz}\,\frac{dU}{dz}\right)$$
$$+\,q\left[\frac{d^2U}{dx^2} + \frac{d^2U}{dy^2} + \frac{d^2U}{dz^2}\right];$$

car

$$\frac{d^2q}{dx^2} + \frac{d^2q}{dy^2} + \frac{d^2q}{dz^2} = 0,$$

comme on a vu ci-dessus; donc

$$\frac{d^2U}{d\xi^2}+\frac{d^2U}{d\eta^2}+\frac{d^2U}{d\zeta^2}$$

$$=p^5\left[\frac{d^2p^{-1}U}{dx^2}+\frac{d^2p^{-1}U}{dy^2}+\frac{d^2p^{-1}U}{dz^2}\right].$$

(*Journal de Mathématiques*, tome XII, page 289.)

Pour la méthode générale de ces transformations, il faut étudier le beau Mémoire de M. Liouville sur les équations de la Dynamique (tome XIV, page 268; 1849).

4. Lorsque le paramètre K^2 (page 237) devient égal à -1, on a les surfaces que M. A. Bravais nomme *inverses* (*Journal de Mathématiques*, tome XIV, page 137; 1849) et sur lesquelles il donne des théorèmes qu'il suffit d'énoncer.

Théorème I. *Lorsque le pôle de symétrie de la surface fixe* P *se déplace, la surface inverse p se change en un nouvel inverse p′ et l'on peut toujours transporter p sur p′ par un mouvement de translation commun à tous les points de la surface p.*

Théorème II. *Si l'on fait tourner de deux angles droits la surface p inverse de* P *autour d'une droite passant par le pôle de symétrie* C, *la surface p′ ainsi obtenue sera la symétrique de* P *par rapport au plan mené par* C *normalement à l'axe de rotation.*

M. Bravais ne considère que des polyèdres. Du reste, ces théorèmes ont aussi occupé Jacobi. (Crelle, tome XV, page 309; 1836.)

Lorsqu'une surface se confond avec son inverse, le pôle de symétrie prend le nom de centre de figure de la surface.

5. L'équation de la podaire d'une ligne plane donnée de degré n est de degré $2n$; et lorsque le point est sur la

courbe, la réciproque de cette podaire est de degré $2n - 2$; dans une conique, la réciproque de la podaire du centre est encore une conique; de même pour les surfaces du second ordre.

6. Soient trois cercles A, B, C situés sur un même plan ou sur une même sphère; P un point commun aux deux cercles A et B. Prenons ce point pour pôle et faisons K^2 égal à la *puissance* de P par rapport au cercle C; les réciproques des cercles A et B sont deux droites (page 237), et le cercle C se confond avec sa réciproque. Menons un cercle tangent aux deux droites et au cercle C; la réciproque de ce cercle, conservant toujours le même point P et la même valeur K^2, sera un cercle tangent aux trois cercles A, B, C.

En augmentant les trois rayons des trois cercles de la même longueur sans changer les centres, on peut toujours faire que deux cercles se coupent. Le centre du cercle touchant les trois ne changera pas. Ainsi le problème de Viète est ramené à celui d'un cercle touchant deux droites et un cercle, et le problème de Fermat à celui d'une sphère touchant trois plans et une sphère.