

SYLVESTER

**Relation entre le volume d'un tétraèdre
et la norme de sa surface**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 13
(1854), p. 203-209

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1854_1_13__203_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1854, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**RELATION ENTRE LE VOLUME D'UN TETRAÈDRE ET LA NORME
DE SA SURFACE;**

D'APRÈS M. SYLVESTER.

(Cambridge and Dublin mathematical Journal, mai 1853.)

1. *Notation:* a, b, c, d , sommets du tétraèdre;
 ab, ac, ad, bc, bd, cd , six arêtes du tétraèdre;
 V = volume du tétraèdre.

On supprime partout les *facteurs numériques*; ils n'ont aucune influence sur les raisonnements qui suivent :

$$\frac{F}{16} = (bcd)^2, \quad \frac{G}{16} = (acd)^2, \quad \frac{H}{16} = (abd)^2, \quad \frac{K}{16} = (abc)^2;$$

N = norme de $F^{\frac{1}{2}} + G^{\frac{1}{2}} + H^{\frac{1}{2}} + K^{\frac{1}{2}}$ = norme de la surface du tétraèdre.

$$\begin{aligned} 2. \quad &-- F = (bc)^4 + (cd)^4 + (db)^4 - 2(bc)^2(cd)^2 \\ &\quad - 2(cd)^2(db)^2 - 2(db)^2(bc)^2; \\ &- G = (ac)^4 + (cd)^4 + (da)^4 - 2(ac)^2(cd)^2 \\ &\quad - 2(cd)^2(da)^2 - 2(da)^2(ac)^2; \\ &-- H = (ab)^4 + (bd)^4 + (da)^4 - 2(ab)^2(bd)^2 \\ &\quad - 2(bd)^2(da)^2 - 2(da)^2(ab)^2; \\ &-- K = (ab)^4 + (bc)^4 + (ca)^4 - 2(ab)^2(bc)^2 \\ &\quad - 2(bc)^2(ca)^2 - 2(ca)^2(ab)^2. \end{aligned}$$

$V^2 = \text{déterminant.}$

$$\left. \begin{array}{l} 0 . ab^2 . ac^2 . ad^2 . 1 \\ ba^2 . 0 . bc^2 . bd^2 . 1 \\ ca^2 . cb^2 . 0 . cd^2 . 1 \\ da^2 . db^2 . dc^2 . 0 . 1 \\ 1 . 1 . 1 . 1 . 0 \end{array} \right\} \left(\text{le facteur supprimé est } \frac{1}{144} \right).$$

$$N = \Sigma F^4 - 4 \Sigma F^3 G + 6 \Sigma F^2 G^2 + 4 \Sigma F^2 GH - 40 FGHK.$$

Σ désigne une fonction symétrique; ainsi

$$\Sigma F^4 = F^4 + G^4 + H^4 + K^4,$$

et ainsi des autres.

N renferme 22 termes positifs et 13 négatifs; en tout, 35 termes en F, G, ... Les lettres F, G, H, K renfermant chacune 6 termes, il s'ensuit que N contient $35 \cdot 6^4 = 45360$ termes, fonctions des carrés des arêtes.

3. Lorsque les quatre sommets sont dans un même plan, on a évidemment

$$\sqrt{F} + \sqrt{G} + \sqrt{H} + \sqrt{K} = 0,$$

mais cette expression est un facteur de N; donc N s'annule dans cette supposition et aussi V; par conséquent, N renferme, comme facteur, une puissance de V; mais N est une fonction rationnelle des carrés des arêtes, fonction du huitième degré, et V^2 une fonction rationnelle des mêmes carrés et du troisième degré: on a donc

$$N = V^2 Q,$$

et Q est une fonction rationnelle des mêmes carrés et du cinquième degré; il s'agit de trouver Q.

Lorsque deux arêtes opposées deviennent nulles, Q devient aussi nul; en effet, supposons

$$ab = 0, \quad cd = 0,$$

alors

$$\begin{aligned} -F &= [(bc)^2 - (db)^2]^2, \\ -G &= [(ca)^2 - (da)^2]^2, \\ -H &= [(ad)^2 - (bd)^2]^2, \\ -K &= [(ac)^2 - (bc)^2]^2, \\ F - G - H + K &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi N est nul; mais V^2 n'est pas nul, car V^2 est alors six fois le déterminant.

$$\begin{array}{cccccc} 0 & . & 0 & . & ac^2 & . & ad^2 & . & 1, \\ 0 & . & 0 & . & bc^2 & . & bd^2 & . & 1, \\ ca^2 & . & cb^2 & . & 0 & . & 0 & . & 1, \\ da^2 & . & db^2 & . & 0 & . & 0 & . & 1, \\ 1 & . & 1 & . & 1 & . & 1 & . & 0, \end{array}$$

déterminant qui n'est pas nul, puisqu'on a le terme

$$ad^2 \cdot bc^2 \cdot cb^2 \cdot 1 \cdot 1,$$

et encore d'autres.

Effectuant, on trouve

$$2(ac^2 \cdot bd^2 - ad^2 \cdot bc^2)(ad^2 + bc^2 - ac^2 - bd^2) (*)$$

(Voir *Nouvelles Annales*, tome XI, page 301).

Or

$$N = V^2 Q;$$

il faut donc que, dans cette hypothèse, Q s'annule.

Ainsi, α, β, γ étant les arêtes partant d'un sommet, et α', β', γ' les arêtes respectivement opposées, chaque terme de Q doit renfermer, soit α ou α' , soit β ou β' , soit γ ou γ' .

(*) Le volume n'étant pas nul, il faut que la distance des deux arêtes opposées ab, cd devienne infinie.

(206)

Supposons, maintenant,

$$ab = 0, \quad ac = 0;$$

on obtient

$$\sqrt{K} = i \cdot \overline{bc^2},$$

$$\sqrt{H} = i (\overline{ad^2} - \overline{bd^2}),$$

$$\sqrt{G} = i (\overline{ad^2} - \overline{cd^2}),$$

$$F = -bc^4 - bd^4 - cd^4 + 2bc^2 \cdot bd^2 + 2bcd^2 \cdot cd^2 + 2cd^2 \cdot cd^2.$$

N est le produit de ces huit facteurs :

$$\begin{aligned} & (\pm \sqrt{F} - \sqrt{G} + \sqrt{H} + \sqrt{K}) (\pm \sqrt{F} + \sqrt{G} - \sqrt{H} + \sqrt{K}) \\ & \times (\pm \sqrt{F} + \sqrt{G} + \sqrt{H} + \sqrt{K}) (\pm \sqrt{F} + \sqrt{G} + \sqrt{H} - \sqrt{K}). \end{aligned}$$

Les quatre premiers facteurs donnent, toujours dans la supposition $ab = 0, ac = 0,$

$$\begin{aligned} & | F + (bc^2 + cd^2 - bd^2)^2 | [F + [bc^2 - cd^2 + bd^2]^2] \\ & = 16 \cdot bc^4 \cdot bd^2 \cdot cd^2. \end{aligned}$$

Les quatre derniers facteurs donnent

$$\begin{aligned} & [F + (2ad^2 - bd^2 - cd^2 + bc^2)] [F + (2ad^2 - bd^2 - cd^2 - bc^2)] \\ & = 16 \left[\begin{array}{l} ad^4 - ad^2 (bd^2 + cd^2 + bc^2) + bc^2 \cdot bd^2 + bd^2 \cdot cd^2 \\ + cd^2 \cdot bc^2 \end{array} \right] \\ & \quad [ad^4 - ad^2 (bd^2 + cd^2 - bc^2) + bd^2 \cdot cd^2]. \end{aligned}$$

Dans cette même hypothèse, N^2 devient

$$\begin{aligned} & 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot ad^4 \cdot 1, \\ & 0 \cdot 0 \cdot bc^2 \cdot bd^2 \cdot 1, \\ & 0 \cdot cb^2 \cdot 0 \cdot cd^2 \cdot 1, \\ & da^2 \cdot db^2 \cdot dc^2 \cdot 0 \cdot 1, \\ & 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 0, \end{aligned}$$

déterminant égal à

$$2 bc^2 [ad^4 - ad^2 \cdot (bd^2 + cd^2 - bc^2) + bd^2 \cdot cd^2]$$

(Voir *Nouvelles Annales*, t. XI, p. 304).

Ainsi, dans cette hypothèse, $Q = \frac{N}{V^2}$ se réduit à

$$bc^2 \cdot bd^2 \cdot cd^2 \left[\begin{array}{l} ad^4 - ad^2 \cdot (bd^2 + cd^2 + bc^2) + bc^2 \cdot bd^2 \\ + bd^2 \cdot cd^2 + cd^2 \cdot bc^2 \end{array} \right],$$

le facteur supprimé est 48^2 .

Ce sont tous les termes de Q qui ne renferment ni ab ni ac ; donc la somme de tous les termes qui ne contiennent que les carrés de quatre arêtes est donnée par la fonction symétrique

$$\Sigma bc^2 \cdot bd^2 \cdot cd^2 \left[\begin{array}{l} ad^4 - ad^2 (bd^2 + cd^2 + bc^2) \\ + bc^2 \cdot bd^2 + bd^2 \cdot cd^2 + cd^2 \cdot bc^2 \end{array} \right],$$

il est évident qu'on peut changer b en c et c en b , b en d et d en b , c en d et d en c , de sorte que la fonction peut s'écrire

$$\Sigma bc^2 \cdot bd^2 \cdot cd^2 \left[\begin{array}{l} ab^4 + ac^4 + ad^4 \\ - (ab^2 + ac^2 + ad^2)(bd^2 + dc^2 + cb^2) \\ + bc^2 \cdot bd^2 + bd^2 \cdot cd^2 + cd^2 \cdot bc^2 \end{array} \right];$$

bc , bd , cd sont les trois côtés du triangle bcd , ainsi il y a quatre expressions de cette forme. Il reste à trouver le coefficient numérique des six termes de la forme

$$ab^2 \cdot ac^2 \cdot ad^2 \cdot bc^2 \cdot bd^2.$$

Soit λ ce facteur numérique; supposons les six arêtes du tétraèdre égales chacune à l'unité; Q aura pour valeur

$$4(3 - 9 + 3) + 6\lambda = -12 + 6\lambda;$$

les arêtes étant égales, il y aura quelques facteurs de N

égaux à zéro : mais V volume du tétraèdre n'est pas nul, donc Q est nul, et l'on a

$$6\lambda - 12 = 0, \quad \text{d'où } \lambda = 2;$$

ainsi la valeur complète de Q est (abstraction faite du facteur numérique)

$$Q = \Sigma ab^2 \cdot bc^2 \cdot ca^2 \left[\begin{array}{l} (da^4 + db^4 + dc^4) \\ - (da^2 + db^2 + dc^2)(ab^2 + bc^2 + ca^2) \\ + ab^2 \cdot bc^2 + bc^2 \cdot ca^2 + ca^2 \cdot ab^2 \end{array} \right] \\ + 2 \Sigma ab^2 \cdot bc^2 \cdot cd^2 \cdot da^2 \cdot ac^2.$$

Le premier Σ renferme quatre expressions de cette forme, et le second Σ donne six. On peut n'admettre qu'un seul signe Σ , et alors

$$Q = \Sigma ab^2 \cdot bc^2 \cdot ca^2 \left[\begin{array}{l} da^4 + db^4 + dc^4 + da^2 \cdot db^2 + db^2 \cdot dc^2 \\ + dc^2 \cdot da^2 + ab^2 \cdot bc^2 + bc^2 \cdot ca^2 \\ + ea^2 \cdot ab^2 \\ - (da^2 + db^2 + dc^2)(ab^2 + bc^2 + ca^2) \end{array} \right].$$

4. Nous avons vu que Q s'annule lorsque deux arêtes opposées ab , cd s'évanouissent; il en est de même lorsqu'on a simultanément

$$ab = cd, \quad bc = ad,$$

car alors les faces $abc = acd$, $bdc = bda$: donc N s'évanouit, mais V conserve une valeur finie; ainsi Q devient nul (*).

5. Soient $r_1, r_2, r_3, \dots, r_8$ les rayons des huit sphères

(*) Q doit aussi devenir nul lorsqu'on a généralement

$$abc + bdc = acd + bda.$$

Lorsque $abc = acd$, $bcd = bda$, deux rayons deviennent infinis. (Voir *Nouvelles Annales*, t. VI, p. 257, CATALAN.)

inscrites au tétraèdre; on a évidemment

$$r_1 r_2 r_3 r_4 r_5 r_6 r_7 r_8 = \frac{(3V)^8}{N} = \frac{3^8 V^6}{Q}.$$

Donc, lorsque Q est nul, l'un au moins des rayons devient infini, et la sphère correspondante devient un plan. La propriété analogue n'a pas lieu pour le triangle. Soient f, g, h les carrés des côtés du triangle; A l'aire du triangle et V la norme de $\pm\sqrt{f} \pm \sqrt{g} \pm \sqrt{h}$, P le produit des quatre rayons des cercles inscrits; on a

$$PV = (2A)^4, \quad V = \frac{(2A)^4}{P} = A^2, \quad P = 16A^2;$$

ainsi P ne peut jamais devenir infini, à moins que A ne soit infini; alors il n'y a plus de triangle.

6. D'après la forme et la propriété de la fonction Q de caractériser, en s'annulant, une sphère infinie, l'illustre analyste conjecture que cette fonction est un *déterminant*, et qu'en désignant par Q' la fonction analogue pour le tétraèdre $a' b' c' d'$, le produit QQ' , et peut-être même $\sqrt{QQ'}$ est une fonction des carrés des distances des sommets des tétraèdres, comme dans le théorème de M. Staudt (*Nouvelles Annales*, tome XI, page 299).

En considérant les six longueurs ab, ac, ad, bc, bd, cd comme des quantités quelconques, la divisibilité de N par V^2 constitue un beau théorème dans la *morphologie analytique*, qui doit à M. Sylvester tant de richesses, tant de précieuses découvertes.